Ejercicio 1.

a) Explicar qué significa que la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Decir qué se define como su valor principal y hallarlo, si existe, en cada uno de los siguientes casos: i) $f(x) = x$, ii) $f(x) = \cos x$ y iii) $f(x) = \dfrac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1}$. Indicar si en algunos de estos casos, la integral impropia y su valor principal coinciden. → Jordan y su Lema

b) Determinar si la ecuación: $e^{-2xy}\cos(x^2-y^2) = cte$ describe las líneas de corriente de un fluido ideal. En caso afirmativo, calcular el correspondiente potencial complejo.

Ejercicio 2.

a) Verificar que la serie de Fourier de $f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{\pi}t & \text{si } -\pi \leqslant t < 0 \\ 1 - \frac{2}{\pi}t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \pi \end{cases}$ es $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2k+1)^2}\cos((2k+1)t)$ y obtener el valor de $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ y de $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$.

con error de cuenta

Parseval valores de series num.

b) Describir un sistema físico que pueda modelarse mediante el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0<x<1,\ t>0 \\ u(0,t) = 5 & t \geqslant 0 \\ u(1,t) = 0 & t \geqslant 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Variables separables

→ pag 31 de Churchill Series de Fourier y Probl. de cont.

y proponer $f(x)$ tal que su solución se pueda expresar como suma de cuatro términos no nulos.

Ejercicio 3.

a) Para $a > 0$, calcular $\mathcal{F}[e^{-a|x|}](w)$ y $\mathcal{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{a^2+w^2}\right](x)$.

b) Resolver la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) & -\infty < x < +\infty, \quad t>0 \\ u_t(x,0) = 0 & -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

$\boxed{\text{La t es "cte"}}$

sabiendo que $\mathcal{F}[f(x)](w) = \dfrac{1}{1+w^2}$.

Ejercicio 4.

a) Dada $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} e^t & \text{si } t \in [2k, 2k+1) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$, $k \geqslant 0$. Demostrar que f es seccionalmente continua y de orden exponencial. Calcular la transformada de Laplace de f, especificando su dominio de convergencia.

b) Obtener f definida en $\mathbb{R}$ con $f(t) = 0\ \forall t \leqslant 0$ tal que

$$\int_0^{\infty} \frac{z+1}{z+2} e^{-zt} f'(t)\,dt = \frac{3}{z^2+3z+2}$$ para z en algún conjunto del plano complejo.

Aplico $\mathcal{F}^{-1}$.

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{a^2+w^2}\right)}_{\text{función par}} = \frac{e^{-|t|a}}{2a}\underbrace{\cancel{2\pi}}_{\text{importante.}}$$

1

③ a) $\mathcal{F}(e^{-a|x|}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t}\,dt$ llamo $x = t$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-a(-t)} e^{-i\omega t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t}\,dt$$

$$\underset{a>0}{=} \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{(-a-i\omega)t}\,dt$$

$$= \left.\frac{e^{(a-i\omega)t}}{a-i\omega}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{(-a-i\omega)t}}{-a-i\omega}\right|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{a-i\omega} - \frac{1}{-a-i\omega} = \frac{1}{(a-i\omega)} + \frac{1}{(a+i\omega)}$$

$$= \frac{a+i\omega + a-i\omega}{(a-i\omega)(a+i\omega)} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

Recordar $z\bar{z} = |z|^2$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{a^2+\omega^2}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+\omega^2} e^{i\omega t}\,d\omega$$

$$\mathcal{F}(e^{-a|t|}) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$\frac{\mathcal{F}(e^{-a|t|})}{2a} = \frac{1}{a^2+\omega^2} \underset{\text{linealidad}}{=} \mathcal{F}\left(\frac{e^{-|t|a}}{2a}\right)$$

Aplico $\mathcal{F}^{-1}$.

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{a^2+\omega^2}\right)}_{\text{función par.}} = \frac{e^{-|t|a}}{\cancel{2}a}\underbrace{\cancel{2}\pi}_{\text{importante.}}$$

b)

① $u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$ $\quad -\infty < x < +\infty \,, \; t>0$

② $u_t(x,0) = 0$ $\quad -\infty < x < +\infty$

$u(x,0) = f(x)$ $\quad -\infty < x < +\infty$

$\boxed{\text{es una ecuación de onda}}$

y sé que $\mathcal{F}(f(x)) = \dfrac{1}{1+\omega^2}$

Aplico TF a ① a ambos lados:

$\boxed{\text{Lado derecho}}$ $\hat{u}_{tt}(\omega,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u_{tt}(x,t)\, e^{-i\omega x}\, dx$

$= \dfrac{d^2}{dt^2} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{-i\omega x}\, dx = \dfrac{d^2}{dt^2}\, \hat{u}(\omega,t)$

$\boxed{\text{Lado izquierdo}}$ $\hat{u}_{xx}(\omega,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}(x,t)\, e^{-i\omega x}\, dx$

$= (i\omega)^2 \cdot \mathcal{F}(u(x,t)) = -\omega^2 \hat{u}(\omega,t)$

$\Rightarrow \dfrac{d^2}{dt^2}\, \hat{u}(\omega,t) = -\omega^2 \hat{u}(\omega,t)$

No es necesario

Para resolver la ED, ω se la toma como "cte";
es equivalente a resolver:

$y'' = -\omega^2 y$

↳ el polinomio asociado es:
$p(m) = m^2 - \omega^2 m$ (con $\omega = $ cte)

Propongo: $A(\omega)\cdot\cos(\omega t) + B(\omega)\cdot \text{sen}(\omega t) = \hat{u}(\omega,t)$

Verifico:

$-A(\omega)\cdot \text{sen}(\omega t)\,\omega^2 - B(\omega)\,\omega^2 \cos(\omega t)$

$= -\omega^2 \left(A(\omega) \cos(\omega t) + B(\omega)\, \text{sen}(\omega t) \right)$

<u>cumple.</u>

Ejercicio 1.
(a) Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y sim...
simple y c...

$\Rightarrow \hat{\mu}(\omega,t) = A(\omega)\cos(\omega t) + B(\omega)\,\mathrm{sen}(\omega t)$

Obtengo más datos de ②:

$$\hat{\mu_t}(\omega,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\mu_t(x,0)}_{0} e^{-i\omega x}\,dx = 0$$

$$\hat{\mu}_t(\omega,t) = -A(\omega)\,\omega\,\mathrm{sen}(\omega t) + B(\omega)\,\omega\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \hat{\mu}_t(\omega,0) = B(\omega)\omega = 0 \underset{\omega\neq 0}{\Rightarrow} \boxed{B(\omega)=0}$$

Actualizo:

$$\hat{\mu}(\omega,t) = A(\omega)\cos(\omega t) \quad (*)$$

Debo ver que $\mu(x,0) = f(x)$, aplico Fourier a ambos lados también:

$$\hat{\mu}(\omega,0) = \mathcal{F}(\mu(x,0)) = \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$\underset{(*)}{\Rightarrow} \hat{\mu}(\omega,0) = A(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$\therefore \boxed{\hat{\mu}(\omega,t) = \frac{1}{1+\omega^2}\cos(\omega t)} \Rightarrow \mu(\omega,t) = \overset{\frac{e^{-|x|}}{2}}{f(x)} * \big(\delta(x-t)+\delta(x+t)\big)$$

$$\mu(\omega,t) = \frac{1}{4}\left[e^{-|x-t|} + e^{-|x+t|}\right]$$

② b) Es el flujo de calor en una varilla de largo 1.

① $\mu_{xx}(x,t) = \mu_t'$ $\quad 0<x<1,\ t>0$ ecuación de calor

② $\mu(0,t) = S$ $\quad t\geq 0 \to$ extremo a temp fija S.

③ $\mu(1,t) = 0$ $\quad t\geq 0 \to$ " " " " 0

④ $\mu(x,0) = f(x)$ $\quad 0\leq x\leq 1 \to$ temp inicial.

¿Sirve método de variables separables?

Propongo $u(x,t) = X(x)\,T(t)$

$$u_t = X(x)T'(t) = u_{xx} = X''(x)T(t)$$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \text{"cte" la cual llamo } \lambda.$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ T' - \lambda T = 0 \end{cases}$$

Veo de ② y ③:

$$u(0,t) = 5 = X(5)T(t) \Rightarrow X(5) = 5/T(t)$$

$$u(1,t) = 0 = X(0)T(t) \Rightarrow X(0) = 0$$

No sirve así

Debo "homogeneizar":

Propongo $\boxed{u(x,t) = V(x) + W(x,t)}$

$V(x)$: solución permanente; $W(x,t)$: solución transitorio.

cuando $t \to \infty$ $\boxed{u_t = 0}$; se estabilizó la temp.

Para el régimen permanente:

$V_{xx} = 0 \longrightarrow \boxed{V(x) = Ax + B}$

$$\left.\begin{aligned} V(0) &= 5 \\ V(1) &= 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{V(x) = -5x + 5}$$

Con esto:

② $u(0,t) = 5 = V(0) + W(0,t) = 5 + W(0,t) \Rightarrow \boxed{W(0,t) = 0}$

③ $u(1,t) = 0 = V(1) + W(1,t) = W(1,t) \Rightarrow \boxed{W(1,t) = 0}$

① $u_t(x,t) = W_t(x,t) = W_{xx}(x,t)$

④ $u(x,0) = f(x) = V(x) + W(x,0) \Rightarrow \boxed{W(x,0) = f(x) + 5x - 5}$

∴ ahora sí uso método de separación de variables:

Ejercici...

Propongo:

$$\boxed{w(x,t) = X(x)T(t)}$$

$$\begin{cases} w_t(x,t) = w_{xx}(x,t) \\ w(0,t) = 0 = w(1,t) \\ w(x,0) = f(x) + 5x - 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow w_t = X(t)T'(t)$
$= u_{xx} = X''(x)T(t)$

$\Rightarrow \dfrac{X''(x)}{X(t)} = \dfrac{T'(t)}{T(t)} = \lambda = \text{'cte'}$

$$\begin{cases} a)\ X'' - \lambda X = 0 \\ b)\ T' - \lambda T = 0 \end{cases}$$

$w(0,t) = 0 = X(0)T(t) \Rightarrow \boxed{X(0) = 0}$

y análogam $\boxed{X(1) = 0}$

Resuelvo a):

- $X'' - \lambda X = 0$ con $\lambda = 0$

$X'' = 0 \Rightarrow X(x) = ax+b \rightarrow$ con $X(1) = X(0) = 0$ debería ser cte $= 0$

$\Rightarrow$ no es solución $\lambda = 0$.

- Si $\lambda > 0$ $\quad X(x) = \alpha e^{-\sqrt{\lambda}x} + \beta e^{\sqrt{\lambda}x}$

$\Rightarrow X(0) = \alpha + \beta = 0 \rightarrow \beta = -\alpha$

$X(1) = \alpha e^{-\sqrt{\lambda}} + \beta e^{\sqrt{\lambda}} = 0$

$-\beta e^{-\sqrt{\lambda}} + \beta e^{\sqrt{\lambda}} = 0$

$\beta(\underbrace{e^{\sqrt{\lambda}} + e^{-\sqrt{\lambda}}}_{\neq 0}) = 0$

$\neq 0. \Rightarrow \boxed{\beta = 0 = -\alpha}$

No es solución $\lambda > 0$.

es importante que quede periódica.

- Si $\lambda < 0$. $\quad p(r) = r^2 - \lambda = 0$

Si $\lambda = -w^2 \Rightarrow \boxed{r = \pm i w}$

$X(x) = \alpha e^{iwx} + \beta e^{-iwx} = \alpha_1 \cos(wx) + \alpha_2 \operatorname{sen}(wx)$

$\Rightarrow X(0) = \alpha_1 = 0$, $X(1) = 0 = \alpha_2 \operatorname{sen}(w)$ si $w = k\pi$

$\rightarrow \boxed{X(x) = \alpha_2 \operatorname{sen}(k\pi x)}$

③

Escaneado con CamScanner

Por lo tanto:

$$T' + (k\pi)^2 T = 0$$

$$\Rightarrow T(t) = a_1 e^{-(k\pi)^2 t}$$

$$\Rightarrow W_m(x,t) = X_m(x) \cdot T_m(t)$$

$$W_m(x,t) = B_m \cdot \operatorname{sen}(m\pi x)\, e^{-(k\pi)^2 t}$$

$$W(x,t) = \sum_{m=1}^{+\infty} B_m \operatorname{sen}(m\pi x)\, e^{-(k\pi)^2 t}$$

$$W(x,0) = \sum_{m=1}^{+\infty} B_m \operatorname{Sen}(m\pi x) = f(x) + 5x - 5$$

$\Rightarrow$ elijo: $B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$, $B_3 \neq 0$, $B_4 \neq 0$, $B_m = 0$ $\forall m > 4$.

$$W(x,t) = B_1 \operatorname{Sen}(x\pi)\, e^{-\pi^2 t} + B_2 \operatorname{Sen}(2\pi x)\, e^{-4\pi^2 t}$$
$$+ B_3 \operatorname{Sen}(3\pi x)\, e^{-9\pi^2 t} + B_4 \operatorname{Sen}(4\pi x)\, e^{-16\pi^2 t}$$

y para eso,

$$\boxed{f(x) = B_1 \operatorname{sen}(x\pi) + B_2 \operatorname{Sen}(2\pi x) + B_3 \operatorname{Sen}(3\pi x) + B_4 \operatorname{Sen}(4\pi x) - 5x + 5}$$

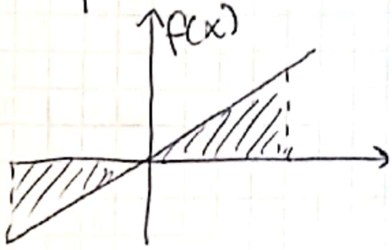
(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ (c) $\iff \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx\ \exists$ y $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,dx\ \exists$

$\forall c \in \mathbb{R}$

VP de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \overset{def}{=} \lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$

i) Si $f(x) = x$

$\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} x\,dx = \lim\limits_{a\to+\infty} 0 = 0.$



int impropia:

$\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 x\,dx + \lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b x\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\frac{x^2}{2}\Big|_a^0 + \lim\limits_{b\to+\infty}\frac{x^2}{2}\Big|_0^b$

$= \lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} -\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = 0$

ii) Si $f(x) = \cos(x)$

VP $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x)\,dx = \lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}\cos(x)\,dx = \lim\limits_{a\to+\infty} 2\,\mathrm{sen}(a)$

$\nexists$

int impropia:

$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 \cos(x)\,dx$

$+ \lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b \cos(x)\,dx.$

$= \lim\limits_{a\to-\infty} -\mathrm{sen}(a) + \lim\limits_{b\to+\infty}\mathrm{sen}(b)$

$\nexists \qquad \nexists$

iii) Si $f(x) = \dfrac{x\,\mathrm{sen}(x)}{x^2+1}$

$\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} \dfrac{\overset{\text{impar}}{x\,\mathrm{sen}(x)}}{\underset{\text{par}}{x^2+1}}\,dx$ impar, par, par

$= \lim\limits_{a\to+\infty} 2\int_0^a \dfrac{x\,\mathrm{sen}(x)}{x^2+1}$

Puedo hallar el valor de esta integral pensando en el Lema de Jordan. Previo verifico que haya convergencia absoluta:

$|f(x)| = \dfrac{|x\,\mathrm{sen}(x)|}{|x^2+1|} = \dfrac{|x|\,|\mathrm{sen}(x)|}{|x^2+1|} \overset{x\in(0,+\infty)}{\le} \dfrac{x}{x^2+1} \le 1/x \to$ no converge, no sirve.

$$\frac{x\,\text{sen}(x)}{1+x^2} \qquad dV = \frac{x}{1+x^2} \Big\} \text{Nope.}$$

$$\downarrow$$

$$V = ?$$

Con paso al límite:

$$f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1 \Rightarrow \text{Si } \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \ (C)$$

tmb lo hace $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x}\,dx = \text{Si}(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

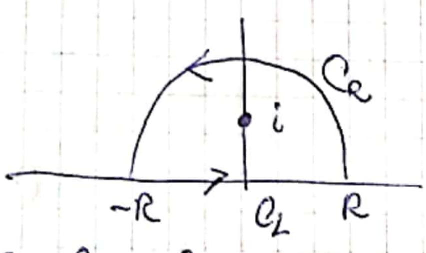
func par

$$= \frac{\mathcal{F}\left(\frac{\text{sen}(x)}{x}\right)(\omega=0)}{2} = \frac{\pi\,\text{rect}(0)}{2}$$

$$= \pi/2 \quad (C)$$

Tomo un lazo de Jordan y busco una $f(z) / \int f(x)$ sea la parte $\mathbb{R}$ o $\mathbb{I}$ para realizar la cuenta.

$$f(z) = \frac{z e^{iz}}{1+z^2}$$



$$\Gamma = C_L \cup C_R$$

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,\text{Res}(f, i) = \lim_{z\to i} (z-i)\frac{e^{iz} z}{1+z^2} \cdot 2\pi i$$

$$= 2\pi i \cdot \lim_{z\to i} \frac{z e^{iz}}{z+i} = 2\pi i \frac{(i)e^{-1}}{2i}$$

$$= \frac{\pi i}{e}$$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{C_L} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz.$$

$$\underset{R\to+\infty}{=} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{z e^{iz}}{1+z^2}\,dz + \underbrace{\int_{C_R} \frac{z e^{iz}}{1+z^2}\,dz}_{\to 0 \text{ porque}}$$

$$\left|\int_{C_R} \underbrace{\frac{z e^{iz}}{1+z^2}}_{\hat{g}(z)}\,dz\right| \le \int_0^\pi |f(z(t))|\,|e^{iz(t)}|\,|z'(t)|\,dt$$

$$= \int_0^\pi \left|\frac{R}{1+R^2}\right| \left|e^{iRe^{it}}\right| \left|iRe^{it}\right| dt \quad (*)$$

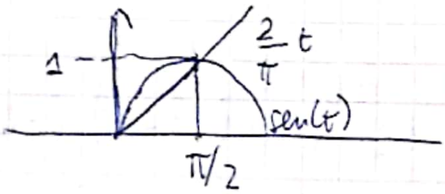
$\lim_{z\to\infty} \hat{g}(z) = 0$

$$\left|e^{iRe^{it}}\right| = \left|e^{iR(\cos(t) + i\,sen(t))}\right| = \left|e^{iR\cos(t)}\,e^{-R\,sen(t)}\right|$$

$$= e^{-R\,sen(t)}$$

$$(*) = \int_0^\pi \frac{R^2}{1+R^2} e^{-R\,sen(t)}\,dt = \frac{R^2}{1+R^2}\int_0^\pi e^{-R\,sen(t)}\,dt$$

$$= \frac{2R^2}{1+R^2}\int_0^{\pi/2} e^{-R\,sen(t)}\,dt \le \frac{2R^2}{1+R^2}\int_0^{\pi} e^{-R(2/\pi)t}\,dt$$



$$= \frac{2R^{\cancel{2}}}{(1+R^2)\left(-\cancel{R}\frac{2}{\pi}\right)}\, e^{-R\frac{2}{\pi}t}\Big|_0^{\pi/2}$$

$\forall t\in[0,\pi/2]$

$sen(t) \geq \frac{2}{\pi}t \geq 0$

$$= \frac{\pi R}{1+R^2}\left(1 - e^{-Rt}\right) \underset{R\to+\infty}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} \frac{z\,e^{iz}}{1+z^2}\,dz = Vp\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos(x)}{1+x^2}}_{\substack{=0 \text{ ya que} \\ \text{la función} \\ \text{es impar}}} + i\,Vp\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\text{sen}(x)}{1+x^2}$$

$z = x$ $\qquad\qquad = \dfrac{\pi i}{e}$

$$\Rightarrow \boxed{Vp\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\text{sen}(x)}{1+x^2} = \frac{\pi}{e}}$$

coincide con la integral impropia dado que su VP ∃ y la función es par.

b)

$e^{-2xy}\cos(x^2-y^2) = cte$ ¿Describe líneas de corriente de un fluido ideal? Si es así, calcular potencial complejo.

$f(z) = e^{-iz^2}$ donde $Re(f(z)) = e^{-2xy}\cos(x^2-y^2)$

$= e^{-2xy}\cos(x^2-y^2)$

$+ i\,e^{-2xy}\,\text{sen}(x^2-y^2)$ $\qquad Im(f(z)) = e^{-2xy}\,\text{sen}(x^2-y^2)$

Como quiero que mi función sean líneas de corriente:

$$f(z) = i\,e^{-iz^2} = \underbrace{-e^{-2xy}\,\text{sen}(x^2-y^2)}_{\text{líneas de flujo }(\Phi)} + i\underbrace{e^{-2xy}\cos(x^2-y^2)}_{\text{líneas de corriente }(\Psi)}$$

<u>Verifico que es holomorfa:</u>

Φ, Ψ son func. diferenciables ya que son multiplicación de func. diferenc.

$$\Phi_x = e^{-2xy}\,2y\,\text{sen}(x^2-y^2) - e^{-2xy}\cdot\cos(x^2-y^2)\,2x$$

$$\Psi_y = -2x\,e^{-2xy}\cos(x^2-y^2) + e^{-2xy}(-\text{sen}(x^2-y^2)(-2y))$$

$$= -2x\,e^{-2xy}\cos(x^2-y^2) + 2y\,e^{-2xy}\,\text{sen}(x^2-y^2)$$

$\Phi_x = \Psi_y$ ✓

$$\Phi_y = 2x\,e^{-2xy}\,\text{sen}(x^2-y^2) - e^{-2xy}\cos(x^2-y^2)(-2y)$$

$$-\Psi_x = \left(2y\,e^{-2xy}\cos(x^2-y^2) + e^{-2xy}(-\text{sen}(x^2-y^2))\,2x\right)(-1)$$

$\Phi_y = -\Psi_x$ ✓ $\quad\Rightarrow$ cumple CCR.

Debo ver que $\nabla \cdot \bar{V} = 0$ donde $\bar{V} = \Big[\underbrace{e^{-2xy}\left(2y \operatorname{sen}(x^2-y^2) - 2x\cos(x^2-y^2)\right)}^{p}, \underbrace{e^{-2xy}\left(2x \operatorname{sen}(x^2-y^2) + 2y\cos(x^2-y^2)\right)}_{q}\Big]$

para que sea $\boxed{\text{incompresible}}$

¿$\nabla \cdot \bar{V} = \underbrace{p_x}_{\phi_{xx}} + \underbrace{q_y}_{\phi_{yy}} = 0$?

$$p_x = -2y\, e^{-2xy}\left(2y\operatorname{sen}(x^2-y^2) - 2x\cos(x^2-y^2)\right) + e^{-2xy}\left(2y\cos(x^2-y^2)\,2x + \left[-2\cos(x^2-y^2) + 2x(\operatorname{sen}(x^2-y^2)\,2x\right]\right)$$

$+$

$$q_y = -2x\, e^{-2xy}\left(2x\operatorname{sen}(x^2-y^2) + 2y\cos(x^2-y^2)\right) + e^{-2xy}\left[2x\,2y\cos(x^2-y^2) + 2\cos(x^2-y^2) + 2y\cdot(-\operatorname{sen}(x^2-y^2))\cdot(-2y)\right]$$

$= 0$

$\Rightarrow \phi$ es armónica (como debe serlo)

y ψ es su " conjugada.

Si $\nabla \times (p, q, 0) = \bar{0} \Rightarrow$ es irrotacional, y efectivam. lo es ya que

$$p_y = \phi_{xy} = \psi_{yy} \quad \Leftarrow \quad \phi_x = \psi_y = p$$
$$q_x = \phi_{yx} = -\psi_{xx} \qquad \phi_y = -\psi_x = q$$

$\boxed{\text{por CCR}}$

¿Habría que hacer todas las derivadas? No, dado que ψ es armónica $\Rightarrow \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0$

$$\therefore\ q_x - p_y = -\psi_{xx} - (\psi_{yy}) = -(\psi_{xx} + \psi_{yy}) = 0$$

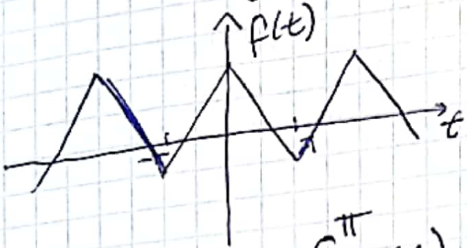
☺

Ejercicio 1.
(a) Sea

② a) $f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{\pi} t & \text{si } -\pi \le t < 0 \\ 1 - \frac{2}{\pi} t & \text{si } 0 \le t \le \pi \end{cases}$

despejo $f(t) = \frac{2}{\pi} g(t) + 1$

donde $g(t) = \begin{cases} t & \text{si } -\pi \le t < 0 \\ -t & \text{si } 0 \le t \le \pi \end{cases}$



$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos\left(\frac{n \pi t}{\pi}\right) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{2}{\pi} g(t) + 1\right) \cos(nt)\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \overset{\text{impar}}{g(t) \cos(nt)}\, dt + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\, dt}_{0,\ \frac{\operatorname{sen}(nt)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \overset{0}{\operatorname{sen}(n\pi)} - \overset{0}{\operatorname{sen}(-n\pi)}}$$

$$= \frac{2 \cdot 2}{\pi^2} \int_0^{\pi} 2 t \cos(nt)\, dt = \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\pi} t \cos(nt)\, dt = (*)$$

uso integración por partes: $u = t \quad du = dt$

$dv = \cos(nt)\, dt \rightarrow v = \frac{\operatorname{sen}(nt)}{n}$

$$\int t \cos(nt)\, dt = \frac{t \operatorname{sen}(nt)}{n} - \int \frac{\operatorname{sen}(nt)}{n}$$

$$= \frac{n t \operatorname{sen}(nt) + \cos(nt)}{n^2}$$

$$\Rightarrow (*) = \frac{8}{\pi^2} \frac{n t \operatorname{sen}(nt) + \cos(nt)}{n^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{8}{\pi^2} \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2} = \frac{8 (\cos((2k+1)\pi) - 1)}{\pi^2 (2k+1)^2}$$

el coseno se anula en los términos pares, propongo $n = 2k+1$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{2}{\pi}g(t)+1\right)\operatorname{sen}(m\,\cdot)\,d\cdot$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\underbrace{g(t)}_{\text{par}}\,\underbrace{\operatorname{sen}(mt)}_{\text{par}}}_{\text{par}}dt}_{\substack{0 \text{ ya que integra}\\ \text{a func. par en int}\\ \text{simétrico}}} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(mt)\,dt}_{\substack{0 \text{ func. impar}\\ \text{integ. en int}\\ \text{simétrico.}}}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{2}{\pi}g(t)+1\right)dt = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}g(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}dt$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}-t\,dt + 1 = -\frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{2}{\pi^2}+1 = 0$$

$\Rightarrow$ la serie de Fourier de $f(t)$ es.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{8}{\pi^2(2k+1)}\cos((2k+1)t)$$

Por el Teorema de Dirichlet si f es continua en $[a,b]$ y $\exists$ derivadas lat finitas, siendo f par: La serie de Fourier converge unif a $f(x_0)$ ~~pa~~ en x_0 $x\in[a,b]$.

Si f es continua a trozos en $[a,b)$ y $\exists$ deriv lat finitas, cv al valor medio de sus límites laterales en ese punto.

Entonces si evaluamos $S_f(0) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{8}{\pi^2(2k+1)^2} = f(0) = 1$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Escaneado con CamScanner

Luego por el Teorema de Parseval:

$$\int_{-L}^{L} |f(t)|^2 dt = L\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + \sum_{m=1}^{\infty} |b_m|^2\right)$$

Con lo cual:

$$\langle f,f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \pi\left(\cancel{\frac{a_0^2}{2}}^{\,0} + \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{64}{\pi^4(2K+1)^4}\right)$$

f es par

$$2\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{2}{\pi}t\right)^2 dt = \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{64}{\pi^4(2K+1)^4}\cdot\pi$$

$$2\int_0^{\pi} \frac{4}{\pi^2}t^2 - \frac{4}{\pi}t + 1\, dt = 2\left[\frac{4}{\pi^2}\frac{t^3}{3} - \frac{4}{\pi}\frac{t^2}{2} + t\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= \left[\frac{4\cdot\cancel{\pi^3}\pi}{\cancel{\pi^2}\;3} - \frac{4}{\cancel{\pi}}\frac{\pi^{\cancel{2}}}{2} + \pi\right]\cdot 2 = \frac{8}{3}\pi - 4\pi + 2\pi$$

$$= \frac{8}{3}\pi - 2\pi = \frac{2}{3}\pi$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{64}{\pi^4(2K+1)^4}$$

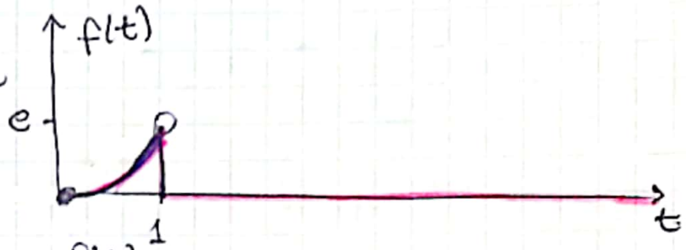
$$\Rightarrow \boxed{\sum_{K=0}^{+\infty} \frac{1}{(2K+1)^4} = \frac{\cancel{2}\pi^4}{3\cdot \cancel{64}_{32}} = \frac{\pi^4}{96}}$$

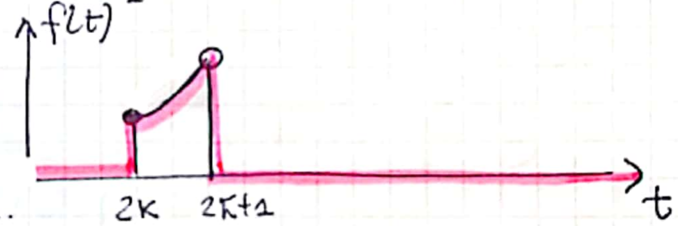
④ a) $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} e^t & \text{si } t \in [2k, 2k+1), \ k \geq 0 \\ 0 & \text{coc} \end{cases}$

Demostrar que f es seccionalmente continua y de orden exponencial y calcular su TL con dom de convergencia.

Una función es de orden exponencial si $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $t_0 > 0$, $M > 0$ / $|f(t)| < M e^{\alpha t}$ si $t > t_0$

f es seccionalmente continua dado que es continua en $(0, 2k)$ y $(2k+1, +\infty)$ y tiene discont. en $2k$ y $2k+1$.





f(t) siempre es menor a e^{2k+1}

$$\Rightarrow |f(t)| < |e^{2k+1}| = e^{2k+1} \quad \forall t > 0$$
$$k \geq 0$$

$\Rightarrow$ Si $M = 1$, $t_0 = 0$ y $\alpha = 1$

$$|f(t)| < M e^{\alpha t} \text{ si } t > t_0$$

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_{2k}^{2k+1} e^t e^{-st} dt = \int_{2k}^{2k+1} e^{(1-s)t} dt$$ (a)

$$= \left. \frac{e^{(1-s)t}}{1-s} \right|_{2k}^{2k+1} = \frac{e^{(1-s)2k+1} - e^{(1-s)2k}}{1-s} = \frac{e^{(1-s)^{2k}} (e^{2k+1} - e^{2k})}{1-s}$$

$\forall Re(s)$ a determinar

Región de Convergencia de Laplace (ROC)

$$ROC(F(s)) = \left\{ s \in \mathbb{C} / \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)\, e^{-\sigma t}|\, dt < \infty \right\}$$
con $s = \sigma + j\omega$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t}\, \mathbb{1}\{t \in [2k, 2k+1]\}\, e^{-\sigma t}\, dt$$

$$= \int_{2k}^{2k+1} e^{\overbrace{(1-\sigma)}^{-(\sigma-1)} t}\, dt = \frac{e^{(1-\sigma)}}{1-\sigma}\left(e^{2k+1} - e^{2k}\right) \Rightarrow \text{converge siempre.}$$

b) Obtener $f / f(t) = 0\ \forall t \leq 0$ donde

$$\int_0^{+\infty} \frac{z+1}{z+2} e^{-zt} f'(t)\, dt = \frac{3}{z^2 + 3z + 2}$$ para z algún conj en el plano complejo.

$$\frac{z+1}{z+2} \int_0^{+\infty} e^{-zt} f'(t)\, dt = \frac{3}{(z+2)(z+1)}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t} \cdot f'(t)\, dt = \frac{3}{(z+2)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} f'(t)\, e^{-zt}\, dt = \frac{3}{(z+2)^2} \Rightarrow \mathcal{L}(f'(t)) = \frac{3}{(z+2)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(z+2)^2}\right\} = t e^{-2t} \cdot \frac{3}{2} = f'(t)$$

$\Rightarrow f_p(t) =$ integral $f'(t)$

integro por partes: $u = t \quad dv = e^{-2t} dt \Rightarrow v = \frac{e^{-2t}}{-2}$

$du = dt$

$$\Rightarrow f_p(t) = \frac{3}{2}\left[t \left(\frac{e^{-2t}}{2}\right) - \int \frac{e^{-2t}}{-2} du \right] = \frac{3}{4} t e^{-2t} + \frac{3 e^{-2t}}{2 \cdot 4} = (2t+1) e^{-2t} + C$$

Si $\boxed{f(t) = \begin{cases} (1+2t)\,e^{-2t} + c & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{eoc} \end{cases} \quad , c \in \mathbb{R}}$

$\Downarrow$

$$f'(t) = \begin{cases} t\,e^{-2t} \cdot 3/2 & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} f'(t)\,e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} t\,e^{-2t} \cdot e^{-st} \cdot 3/2\,dt = \mathcal{L}\left(t\,e^{-2t}\,\tfrac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{(s+2)^2}$$

10

3-7-18

Ejercicio 1.
(a) Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y simplemente conexo y $\Gamma \subset A$ curva diferenciable a trozos, simple y cerrada. Dados $z_1, z_2 \in A$ y $f : A \to \mathbb{C}$ holomorfa, decir bajo qué condiciones la integral

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz$$

está bien definida. Calcular todos sus posibles valores según se varíe la curva Γ.
(b) Estudiar la convergencia de la siguiente integral y de acuerdo a lo hallado, calcular el valor de ésta utilizando residuos:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(1+x^2)}\,dx$$

Ejercicio 2. Sea $f(x) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - |x|\right)$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$.
(a) Encontrar la mejor aproximación de la forma $a + b\cos x + c\operatorname{sen} x$ en el sentido de la media cuadrática en el intervalo $[-\pi, \pi]$ a la función f y decir por qué es la mejor.
(b) Verificar que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}$ converge uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$. ¿Qué se puede decir sobre la convergencia de la serie fuera de este intervalo?

Ejercicio 3.
(a) Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Calcular la transformada de Fourier de $e^{-a|x|}$ y deducir la transformada de Fourier de $\frac{1}{x^2+a^2}$.
(b) Resolver la ecuación diferencial con condición inicial:

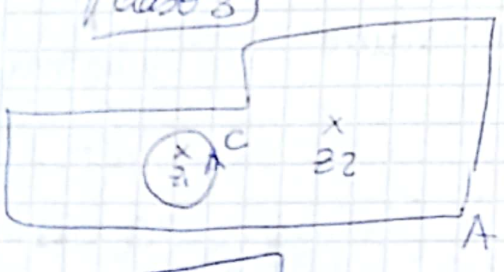
$$\begin{cases} u_x = u_t & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{1}{x^2+1} & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

Ejercicio 4. Sea $H(t)$ la función de Heaviside.
(a) Resolver la siguiente ecuación integral utilizando la transformada de Laplace:

$$\phi(t) + \int_0^t (t-x)\phi(x)dx = H(t)$$

(b) Probar que $\mathcal{L}[f(ax-b)H(ax-b)](s) = \frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}s}\mathcal{L}[f](s/a)$ siendo $a > 0$, $b \geq 0$.

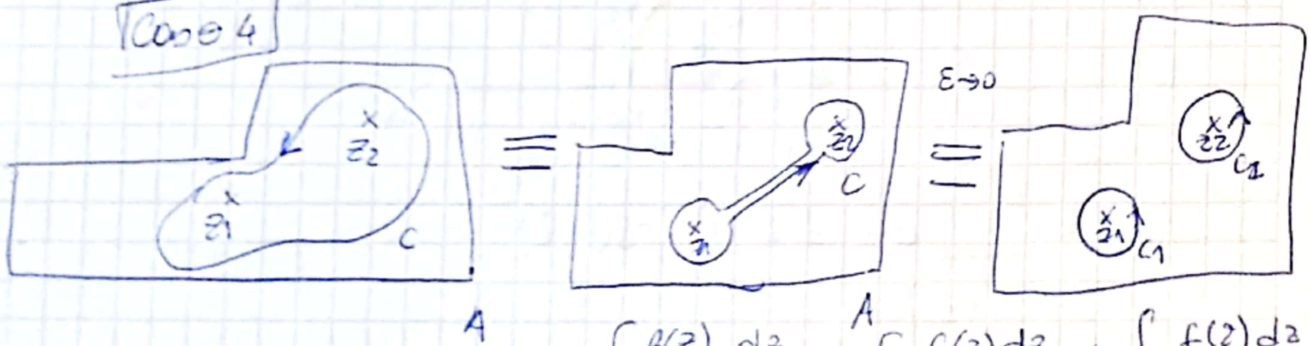
Caso 3



idem caso 2

$$\int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = 2\pi i \cdot \frac{f(z_1)}{z_1 - z_2}$$

Caso 4



$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = \int_{C_1} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)} + \int_{C_2} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

Escaneado con CamScanner

(1) a) $A \subset \mathbb{C}$ abierto y simplemente conexo

$\Gamma \subset A$ curva dif a trozos, simple y cerrada

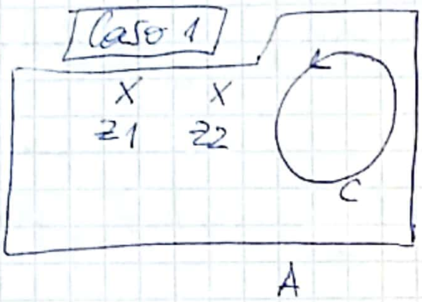
z_1 y z_2 en A. En el $D_{om}\left[\dfrac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\right]$, o sea, si no pasa por z_1 y z_2.

$f(z)$ es $H(A)$

¿Bajo qué condiciones $\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz$ está bien definida?

Calcular todos los posibles valores.

Caso 1

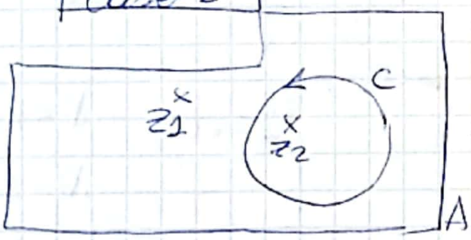


$$\int_\Gamma \underbrace{\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}}_{\text{es holomorfa en } A-\{z_1,z_2\}}\,dz = 0$$

Teorema de Cauchy Goursat [$g(z)$ es $H(C)$ y $H(RI(C))$]

Y tmb podría justif. con Teo. de los Residuos.

Caso 2

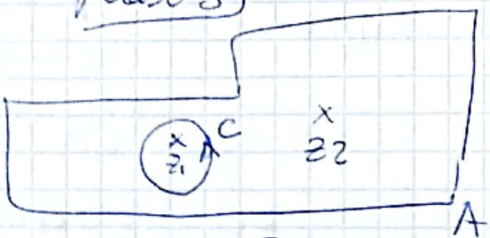


[TIC]: C cerrado, sple orient ⊕, φ holom en C y RI(C)

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz = 2\pi i \cdot \varphi(z_2) = 2\pi i \cdot \frac{f(z_2)}{z_2-z_1}$$

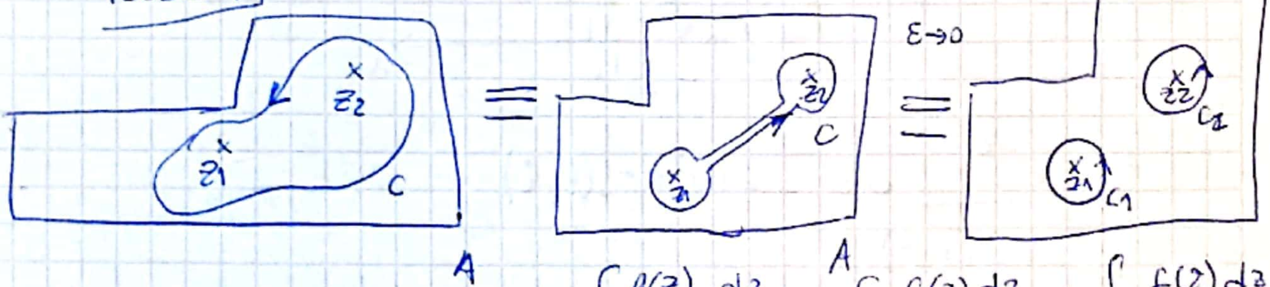
$\varphi(z)$

Caso 3



$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz \overset{\text{idem caso 2}}{=} 2\pi i \cdot \frac{f(z_1)}{z_1-z_2}$$

Caso 4



$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz = \int_{C_1} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)} + \int_{C_2} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

$$= 2\pi i \left[\frac{f(z_1)}{z_1 - z_2} + \frac{f(z_2)}{z_2 - z_1} \right] = \frac{2\pi i}{z_1 - z_2} \left(f(z_1) - f(z_2) \right)$$

Con el Teo de los Residuos sabemos que

C cerrado, sple, ⊕ orient
$f \in H(RI(C) - Z_K)$ $\Rightarrow \int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{1}^{K} Res(f, z_i)$

$Z_K = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ sing.

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(1+x^2)} dx$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x(1+x^2)} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{1+2x} = 1$

$\Rightarrow$ la func presenta disc evit en $x=0$

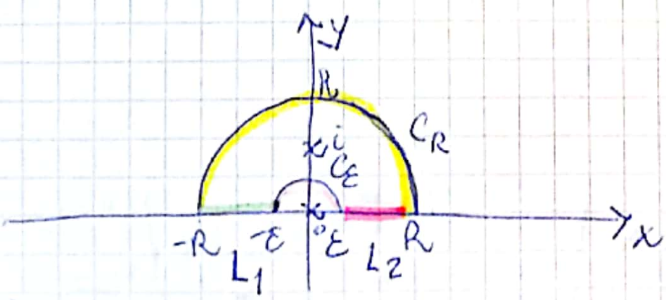
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\left.\frac{\operatorname{sen}(x)}{x(1+x^2)}\right\} f(x)}{g(x)\left\{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right.} = 0 \Rightarrow \text{si} \int_0^{+\infty} g(x)\,(C) \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\,(C)$$

Como $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx$ (C) dado que $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} e^{-\lambda x} dx$

con lo cual $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)\,dx}{x(1+x^2)}$ (C) $= \begin{cases} \pi & \text{si } |x| < 1 \\ \pi/2 & \text{si } |x| = 1 \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$

valor medio de los lím. lat.

Considero $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(1+z^2)}$ y la spte curva



$C = C_R \cup C_\varepsilon \cup L_1 \cup L_2$

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z(1+z^2)} dz = 2\pi i \, Res(f, i)$$

Singularidades de $f(z)$ en $R(C)$

$$f(z) = \frac{m(z)}{n(z)} \quad \text{con } m(z) = e^{iz} \text{ y } n(z) = z(1+z^2)$$

Para cada z_K ocurre que si z_K es cero de orden m de $m(z)$ y z_K es cero de orden n de $n(z)$ si:

$n - m > 0 \Rightarrow z_K$ es polo de orden $n-m$ de $f(z)$

$n - m \leq 0 \Rightarrow z_K$ es sing evitable de $f(z)$

Con $\boxed{z_K = i}$

$m(i) = 1/e \Rightarrow i$ no es cero de $m(z)$

$n(i) = 0$

$n'(i) = 1 + 2z\big|_i \neq 0 \Rightarrow i$ es cero de orden 1 de $n(z)$

$\Rightarrow$ $\boxed{i \text{ es polo de orden } 1 \text{ de } f(z)}$

Con lo cual:

$$\operatorname{Res}(f, z_K) = \lim_{z \to z_K} \frac{1}{(K-1)!} \frac{d^{K-1}}{dz^{K-1}} \left((z - z_K)^K f(z) \right)$$

Teo CG

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(z)\, dz}{(z - z_K)^K}$$

Si z_K es polo de orden 1, $K = 1 \Rightarrow$ $z_K = i$

$$\operatorname{Res}(f, z_K) = \lim_{z \to i} (z - i) \frac{e^{iz}}{z(1+z^2)} = \lim_{z \to i} \frac{e^{iz}}{z(z+i)} = \frac{e^{-1}}{-2}$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}\, dz = -\frac{\pi i}{e}$$

Ahora bien:

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}dz = \overbrace{\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}dz}^{1 \;\; 0} + \overbrace{\int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}dz}{z(1+z^2)}}^{2 \;\; -i\pi} + \int_{L_1} \frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}dz$$

$$+ \int_{L_2} \frac{e^{iz}dz}{z(1+z^2)} = -\pi i/e$$

A todo esto lo llamo ecuación 1

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}dz = \int_{C_R} \frac{|e^{iz}|\,dz}{|z|\,|1+z^2|}$$

$|e^{iz}| = e^{-y}$

e^{-y} está acotada en el semip. sup.

$e^{-y} < 1 \;\; \forall y > 0$

$$\leq M \cdot L = \frac{1}{R(1-R^2)} \cdot \pi R \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

$||1|-|z^2|| \leq |1+z^2| \leq |z^2| + |1|$

$$\Rightarrow \frac{1}{|1+z^2|} < \frac{1}{|1-|z|^2|}$$

Ahora, $\displaystyle\int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}dz = -i\pi \cdot Res(f,0)$

$= -i\pi \cdot 1 = -i\pi$

0 es polo simple, por el Teoremita.

Por la ecuación 1:

$$\int_C \frac{e^{iz}dz}{z(1+z^2)} = 0 - i\pi + \int_{L_1} \frac{e^{iz}dz}{z(1+z^2)} + \int_{L_2} \frac{e^{iz}dz}{z(1+z^2)} = \frac{-\pi i}{e}$$

$$\int_{L_1} \frac{e^{iz}dz}{z(1+z^2)} + \int_{L_2} \frac{e^{iz}dz}{z(1+z^2)} \underset{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}}{=} i\pi(1-1/e)$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}} \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}\,dx}{x(1+x^2)} + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}dx}{x(1+x^2)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}dx}{x(1+x^2)}$$

Escaneado con CamScanner

③

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)\,dx}{x(1+x^2)} + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)\,dx}{x(1+x^2)} = i\pi(1-1/e) + 0$$

$\Rightarrow$ Parte real con parte real e imag con imag

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)\,dx}{x(1+x^2)} = \pi(1-1/e)$$

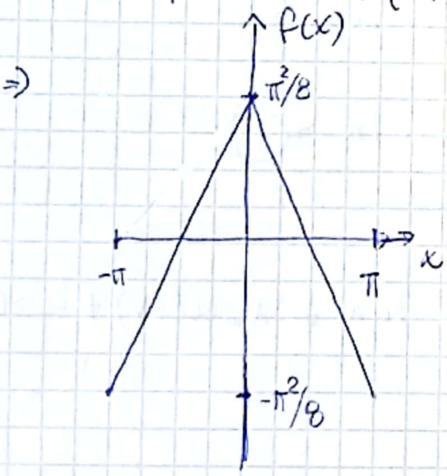
y como $f(x)$ es par: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$

$$\therefore \boxed{\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)\,dx}{x(1+x^2)} = \frac{\pi}{2}(1-1/e)}$$

② a)

$$f(x) = \pi/4\,(\pi/2 - |x|) \;\forall\, x \in [-\pi, \pi]$$

$\Rightarrow$



La función es par $\Rightarrow f(x) = f(-x)$ en $[-\pi, \pi]$

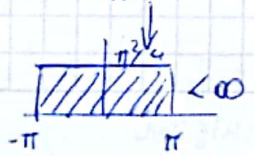
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

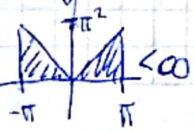
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

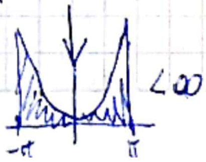
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\pi/2 - |x|\right)^2 dx = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \pi|x| + |x|^2\,dx$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 dx - \int_{-\pi}^{\pi} \pi|x|\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 dx\right] < \infty$$



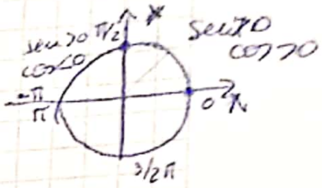


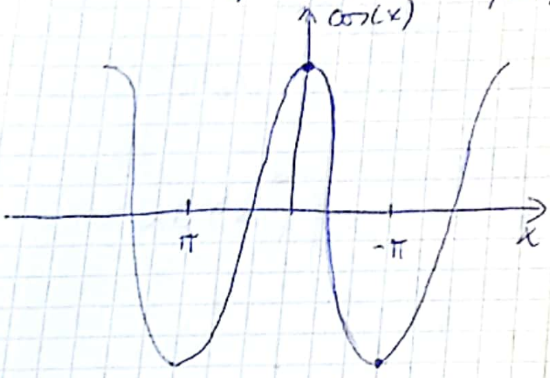


$$\Rightarrow \boxed{S_f(f) \xrightarrow[CM]{} f \text{ en } [-\pi, \pi]}$$

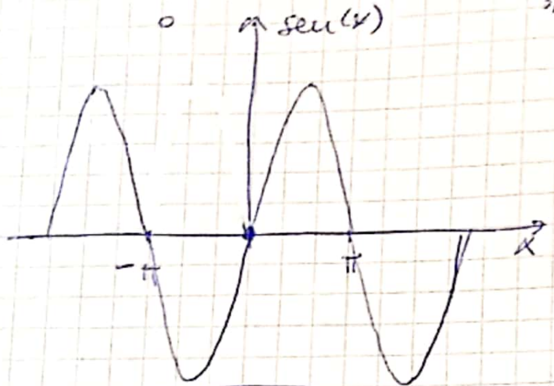
Entonces el DSF es la mejor aprox en MC a f, por lo cual para $n=1$. calculo los coef de Fourier:

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\overbrace{\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-|x|\right)}^{par}\overbrace{\cos(x)}^{par}}_{par} dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-|x|\right)\cos(x)\,dx = \circledast$$





$\boxed{par}$.



$\boxed{impar}$

$$\circledast = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\cos(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(-\underbrace{|x|}_{>0 \text{ en el int dado}}\cos(x)\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\cos(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}x\cos(x)\,dx = \triangle$$

Aux

$$\int x\cos(x)\,dx = x\,sen(x) - \int sen(x)\,dx = x\,sen(x) + \cos(x)$$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = \cos(x)\,dx$

$V = sen(x)$

$$\triangle = \underbrace{\frac{\pi}{4}\, sen(x)\Big|_0^{\pi}}_{0} - \frac{1}{2}\left[x\,sen(x)+\cos(x)\Big|_0^{\pi}\right] = -\frac{1}{2}\left[-2\right] = 1$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\underbrace{f(x)}_{par}\;\underbrace{sen(x)}_{impar}}_{impar}dx = 0$$

func impar int en int sim.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{\pi}{4}\left(\pi/2 - |x|\right)}_{\text{par}} dx = \frac{\cancel{2}}{\cancel{\pi}}\int_0^{\pi} \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{4}_{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \overbrace{|x|}^{>0 \text{ por int}}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} - |x|\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4}\, dx - \int_0^{\pi} \frac{x}{2}\, dx = \frac{\pi^2}{4} - \frac{x^2}{4}\Big|_0^{\pi} = 0$$

$\Rightarrow$ La mejor aprox en el int $[\pi, \pi]$ de f será (respetando la forma que medimos) en sent de media c.:

$$\frac{0}{2} + 0\cdot \operatorname{sen}(x) + 1\circ\cos(x) = \cos(x).$$

a c b

b) Busco el DSF de $f(x)$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx\ ,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{par}}\ \underbrace{\operatorname{sen}(nx)}_{\text{impar}}}_{\text{impar}}\, dx = 0$$

impar en int sim.

$a_0 = 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - |x|\right)\cos(nx)\,dx = \frac{\cancel{2}}{\cancel{\pi}}\int_0^{\pi} \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{4}_{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \overbrace{|x|}^{>0 \text{ en int}}\right)\cos(nx)\,dx$$

func par

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(nx)\,dx = \underbrace{\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx}_{0} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \triangle$$

$$\int x\cos(nx)\,dx = \frac{x\operatorname{sen}(nx)}{n} - \int\left(\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\right)dx$$

$$= \frac{x\operatorname{sen}(nx)}{n} + \left(\frac{\cos(nx)}{n^2}\right) = \frac{nx\operatorname{sen}(nx) + \cos(nx)}{n^2}$$

$$\triangle = -\frac{1}{2}\,\frac{nx\operatorname{sen}(nx) + \cos(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \ (\omega)$$

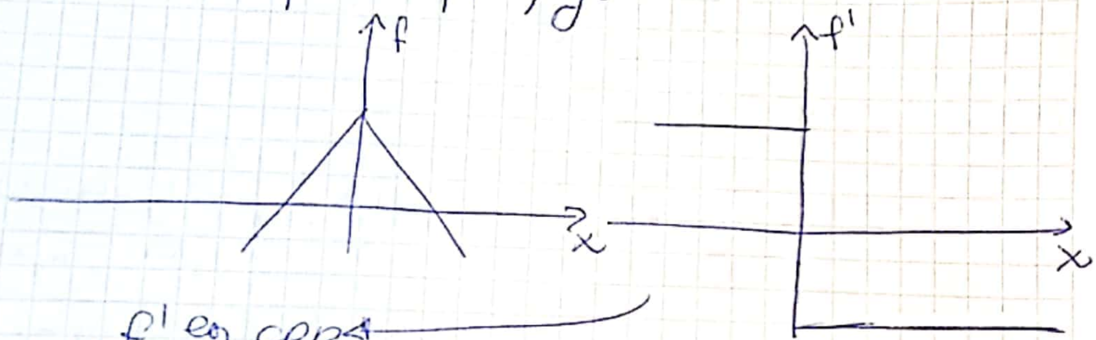
$\Rightarrow S_f(f) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impar}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}$

$n = 2k-1$

∘ f es continua en $[-\pi,\pi]$ y sus derivadas laterales son finitas.

$\Rightarrow S_f$ conv punt f en $[-\pi,\pi]$

∘ Además como $f(\pi) = f(-\pi)$ y:



f' es cpp

con las cond de que conv punt en $[-\pi,\pi]$

$\Rightarrow S_f \xrightarrow{cu} f$ en $[-\pi,\pi]$

③ $\mathcal{F}(e^{-a|x|}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} e^{-j\omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-a(-x)} e^{-j\omega x}\, dx$

$+ \int_{0}^{+\infty} e^{-ax} e^{-j\omega x}\, dx =$

$\int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)x}\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{(-a-j\omega)x}\, dx = \left.\frac{e^{(a-j\omega)x}}{a-j\omega}\right|_{-\infty}^{0} - \left.\frac{e^{-(a+j\omega)x}}{a+j\omega}\right|_{0}^{+\infty}$

$= \frac{1}{a-j\omega} - \frac{1}{a+j\omega} = \frac{a-j\omega+a+j\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$

Escaneado con CamScanner

$$e^{-|t|/2}$$
$$\parallel$$
$$g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\omega) = \frac{1}{a^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\Big(\overbrace{\frac{1}{\omega^2+a^2}}^{G(\omega)}\Big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\omega^2+a^2}\right) e^{j\omega x}\, d\omega = g(x)$$

cambio $x = -\hat{x}$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\omega^2+a^2}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega^2+a^2} e^{-j\omega\hat{x}}\, d\omega = g(\hat{x})$$

Entonces:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+a^2} e^{-j\omega x}\, dx = g(-\omega)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+\omega^2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+a^2} e^{-j\omega x}\, dx = 2\pi \cdot g(-\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

b)

$$u_x = u_t \qquad -\infty < x < +\infty, \; t>0$$

$$u(x,0) = \frac{1}{x^2+1} \qquad -\infty < x < +\infty$$

Usando TF:

$$\hat{u}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{-j\omega x}\, dx$$

$$\downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dx}u(x,t)\, e^{-j\omega x}\, dx = e^{-j\omega x}\cdot u(x,t)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + j\omega\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)\, e^{-j\omega x}\, dx$$

$$u = e^{-j\omega x} \rightarrow du = -j\omega e^{-j\omega x}\, dx \qquad = j\omega\, \hat{u}(\omega, t)$$

$$dv = \frac{du(x,t)}{dx}dx \rightarrow v = u(x,t)$$

Reescribo:

$$\hat{u}_t(\omega,t) = j\omega\,\hat{u}(\omega,t)$$

ED de orden 1, $\hat{\mu}(\omega,t) = K_{(\omega)} \cdot e^{j\omega t}$

Sé que $\mu(x,0) = \frac{1}{x^2+1} = f(x)$, $-\infty < x < +\infty$

$$\hat{u}(\omega,t) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = e^{-|\omega|} \cdot \pi$$

$$\Rightarrow K(\omega) = e^{-|\omega|} \cdot \pi = \hat{f}(\omega)$$

y

$$\hat{\mu}(\omega,t) = e^{-|\omega|}\,\pi\, e^{j\omega t}$$

$$\downarrow$$

$$\mu(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{j\omega t}\hat{f}(\omega)\right) = f(x+t) = \frac{1}{(x+t)^2+1}.$$

4

a) $\phi(t) + \int_0^t (t-x)\,\phi(x)\,dx = H(t)$ (1)

$$\phi(t) \xrightarrow{L} \phi(s)$$

$$t * \phi(x) \xrightarrow{L} 1/s^2 \cdot \phi(s)$$

$$H(t) \xrightarrow{L} 1/s.$$

Aplico en (1) TL:

$$\phi(s) + \frac{\phi(s)}{s^2} = 1/s \rightarrow \phi(s)\left(1 + \frac{1}{s^2}\right) = 1/s$$

$$\phi(s) = \frac{1}{s}\,\frac{1}{1+1/s^2} = \frac{1}{s+1/s} = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\boxed{\phi(t) = \cos(t)}$$

Escaneado con CamScanner

④ b) $\int_0^{+\infty} f(ax-b)\,H(ax-b)\,e^{-sx}\,dx$

$t = ax$

$dt = a\,dx$

$= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(t-b)\,H(t-b)\,e^{-s(t/a)}\,dt = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(t-b)\,H(t-b)\,e^{-\frac{st}{a}}\,dt$

$t-b = u$

$dt = du$

$= \frac{1}{a}\int_{-b}^{+\infty} f(u)\,\underbrace{H(u)}_{H(u)\circ H(u)}\,e^{-\frac{s(u+b)}{a}}\,du$

$= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(u)\,H(u)\,e^{-\frac{su}{a}}\,e^{-\frac{sb}{a}}\,du$

$= \frac{e^{-\frac{sb}{a}}}{a}\int_0^{+\infty} f(u)\,H(u)\,e^{-\frac{su}{a}}\,du$

$= \frac{e^{-\frac{sb}{a}}}{a}\,\mathcal{L}(f)\left(\frac{s}{a}\right)$

Ejercicio 1.

(a) Sea f holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ $(R > 1)$ con $f(0) = 0$ y $\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = 1$.

Calcular $\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right) f(z)\, dz$ y deducir el valor de $\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos\theta \, d\theta$.

(b) Analizar convergencia y calcular $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(x^2+1)^2} dx$. Sug.: $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

Ejercicio 2.

(a) Determinar para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ es válida la igualdad

$$\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen}(2nx)}{4n^2 - 1}$$

(b) Resolver, especificando las hipótesis necesarias sobre las funciones f y g, el problema de la cuerda vibrante con dos extremos fijos:

$$\begin{aligned} &u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 \qquad 0 < x < l,\ t > 0 \qquad (c > 0) \\ &u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \qquad 0 \leqslant x \leqslant l \\ &u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad t \geqslant 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 3. Sea $g(x) = \operatorname{sen} x\, f(\alpha x + \beta)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ y f absolutamente integrable en $\mathbb{R}$.

(a) Argumentar la existencia de la transformada de Fourier de g y calcularla (en términos de la transformada de Fourier de f).

(b) Para $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$, $\alpha = 1$ y $\beta = -1$, resolver:

$$\begin{aligned} &u_t - u_{xx} = 0 \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ &u(x,0) = g(x) \quad -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

Ejercicio 4.

(a) Probar que $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right)(s) = \frac{\mathcal{L}(f(t))(s)}{s}$, indicando hipótesis adecuadas sobre f.

(b) Resolver el sistema:

$$\begin{cases} y' + 2y + 6\int_0^t z(s)\, ds = -2H(t) & y(0) = 1 \\ y' + z' + z = 0 & z(0) = -1 \end{cases} \qquad \text{con } H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

① $f \in H(D)$, $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < R\}$

- $f(0) = 0$
- $\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = 1$

Pide $\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right) f(z)\,dz$ y $\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos\theta\, d\theta$

$z = e^{i\theta}$ $\quad \theta \in [0, 2\pi]$

$dz = i e^{i\theta} d\theta$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} \left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right) f(e^{i\theta})\, i e^{i\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right) f(e^{i\theta})\, i\, d\theta = \int_0^{2\pi} 2 \cdot \frac{\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)}{2} f(e^{i\theta})\, i\, d\theta$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \cos(\theta) f(e^{i\theta})\, i\, d\theta$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2} dz + \int_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot f'(0) + 0 = 2\pi i$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos\theta\, d\theta = \pi}$$

b) $$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{(x^2+1)^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(2x)}{2(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{(x^2+1)^2}}_{g(x)}\,dx - \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\cos(2x)}{(x^2+1)^2}}_{\varphi(x)}$$

converge si ~~/~~ converge.

$$h(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

$\Rightarrow$ si $\int_0^{+\infty} h(x)$ (C) tmb $\int_0^{+\infty} g(x)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)}\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_0^{a} \frac{1}{(x^2+1)}\,dx = \lim_{a\to+\infty} \operatorname{arctg}(a) = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} g(x)$ (C).

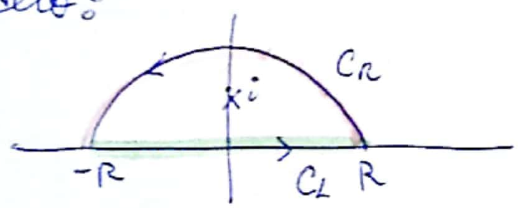
Ahora:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{(x^2+1)^2}\,dx \le \int_0^{+\infty} \frac{|\cos(2x)|}{|x^2+1|^2}\,dx \le \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

y como $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ (C) $\Rightarrow \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ (C)

Calculo el valor de $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ por residuos:

Considero:



$\gamma = C_R \cup C_L$

$$f(z) = \frac{1-e^{i2z}}{2(z^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$$

$$f(z) = \frac{1-e^{i2z}}{2(z-i)^2(z+i)^2} \qquad \varphi(z)$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \frac{\varphi(z)}{(z-i)^2}\,dz = 2\pi i\,\varphi'(i)$$

$$= \cancel{2}\pi i \cdot \frac{9e^{-2}-4}{\cancel{8}\,4}\, i$$

$$= \pi\,\frac{(4-9e^{-2})}{4}$$

$$= \pi\left(1-\tfrac{9}{4}e^{-2}\right)$$

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^k} = \frac{2\pi i \cdot f^{k-1}(z_0)}{k!}$$

Teorema de Cauchy Goursat.

[F es holom en C y RI(C), C cerrado y sple y $z_0 \in RI(C)$]

$$\Rightarrow \varphi'(z) = \frac{(-i2\cdot e^{i2z})(2(z+i)^{\cancel{2}}) - (1-e^{i2z})(4\cancel{(z+i)})}{(z+i)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{(-2ie^{i2z})(2z+2i) - (1-e^{i2z})4}{(z+i)^3}$$

$$\boxed{\varphi'(i)} = \frac{(-2ie^{-2})\,4i - (1-e^{-2})4}{(2i)^3}$$

$$= \frac{8e^{-2}-4+e^{-2}}{8(-i)} = \boxed{\frac{9e^{-2}-4}{8}\, i}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \pi\left(1-\tfrac{9}{4}e^{-2}\right) = \underbrace{\int_{C_L} f(z)\,dz}_{(2)} + \underbrace{\int_{C_R} f(z)\,dz}_{(1)}$$

(1) $$\int_{C_R} \frac{1-e^{i2z}}{2(z^2+1)}\,dz = \underbrace{\int_{C_R} \frac{1}{2(z^2+1)}\,dz}_{(a)} + \underbrace{\int_{C_R} \frac{-e^{i2z}}{2(z^2+1)}\,dz}_{(b)}$$

(a) $$\int_{C_R} \frac{1}{2(z^2+1)^2}\,dz \leq \int_{C_R} \frac{1}{2(1-z^2)^2}\,dz = \frac{1}{2(1-R^2)^2}\,\pi R \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

(b) $$\int_{C_R} \frac{-e^{i2z}}{2(z^2+1)^2}\,dz \leq \int_{C_R} \frac{|1-e^{i2z}|}{2|z^2+1|^2}\,dz \overset{\text{Sobre } R}{=} \frac{\pi \cdot R \cdot 1}{(R^2+1)^2} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

$$|e^{i2z}| = |e^{i(x+iy)}| = e^{-y} \underset{y>0}{<} 1$$

$$||z|^2-|1|| \leq |z^2+1| \leq |z|^2+1$$

$$\Rightarrow \int_{C_R} f(z)\,dz \underset{R\to+\infty}{=} 0$$

$$\int_{C_L} f(z)\,dz \underset{R\to+\infty}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{i2x}}{2(x^2+1)^2}\,dx = \pi(1-9/4\,e^{-2})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(2x)}{2(x^2+1)^2}\,dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2(x^2+1)^2} = \pi(1-9/4\,e^{-2}) + 0i$$

el seno es impar $-\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}(-2x)$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{(x^2+1)^2}\,dx \underset{\text{la } f(x) \text{ es par}}{=} 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{(x^2+1)^2}$$

Con lo cual:
$$\boxed{\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}(1-9/4\,e^{-2})}$$

1) a)

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)\,du\right)(s) = \frac{\mathcal{L}(f(t))(s)}{s} \quad \boxed{\text{Demostrarlo}}$$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^t f(u)\,du\; e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\int_0^t f(u)\,du\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-st}}{-s}f(t)\,dt$$

$$u = \int_0^t f(u)\,du \rightarrow du = f(t)\,dt \qquad (*)$$

$$dv = e^{-st}\,dt \rightarrow v = \frac{e^{-st}}{-s}$$

$$(*) = \underbrace{\lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{s}e^{-st}\int_0^t f(u)\,du}_{\substack{\text{se va a 0 si } f(t) \text{ es de orden exponencial} \\ \exists M, x_0 \\ [|f(t)| \le Me^{x_0 t} \text{ para } t>t_0]}} - \underbrace{\lim_{t\to 0} -\frac{1}{s}e^{-st}\int_0^t f(u)\,du}_{\substack{0,\text{ coinciden los bordes} \\ \text{de integr. en } t\to 0}} + \frac{1}{s}\underbrace{\mathcal{L}(f(t))(s)}_{f \text{ de orden exp y cpp}}$$

b)

$$\begin{cases} y' + 2y + 6\int_0^t z(s)\,ds = -2H(t) \\ y' + z' + z = 0 \end{cases} \qquad y(0) = z(0) = 1$$

$$\begin{cases} sY(s) - y(0) + 2Y(s) + \frac{Z(s)}{s}\cdot 6 = -2\cdot 1/s \\ sY(s) \underbrace{- y(0)}_{-1} + sZ(s) \underbrace{- z(0)}_{1} + Z(s) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sY(s) + 2Y(s) + \frac{Z(s)}{s}\cdot 6 = -2/s + 1 \\ sY(s) + sZ(s) + Z(s) = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} s+2 & 6/s \\ s & s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y(s) \\ Z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{s}+1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(5)

$$y(s)=\frac{\left|\begin{bmatrix}-2/s+1 & 6/s\\ 0 & s+1\end{bmatrix}\right|}{\left|\begin{bmatrix}s+2 & 6/s\\ s & s+1\end{bmatrix}\right|}=\frac{\left(-\frac{2}{s}+1\right)(s+1)}{(s+2)(s+1)-6}=\frac{-2+s-2/s+1}{(s+2)(s+1)-6}$$

$$=\frac{-2s+s^2-2+1}{s(s+2)(s+1)-6s}=\frac{s^2-2s-1}{(s^2+2s)(s+1)-6s}$$

$$=\frac{s^2-2s-1}{s^3+s^2+2s^2+2s-6s}=\frac{s^2-2s-1}{s^3+3s^2-4s}$$

$$=\frac{s^2-2s-1}{s(s^2+3s-4)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+3s-4}=\frac{As^2+3As-4A+Bs^2+Cs}{s(s^2+3s-4)}$$

$$\begin{cases}A+B=1 \longrightarrow \boxed{B=3/4}\\ 3A+C=-2 \longrightarrow 3/4+c=-2\\ -4A=-1 \longrightarrow \boxed{A=1/4}\end{cases}$$

$$c=-2-3/4$$

$$\boxed{C=-11/4}$$

$$y(s)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s}+\frac{3}{4}\cdot\frac{s}{s^2+3s-4}+\left(-\frac{11}{4}\right)\frac{1}{s^2+3s-4}$$

$$s^2-3s-4=s^2-2\cdot\frac{3}{2}\cdot s-4=s^2-2\cdot\frac{3}{2}\cdot s+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-4$$

$$=(s-3/2)^2-15/4$$

$$y(s)=1/4\cdot\frac{1}{s}+\frac{3}{4}\left[\frac{s-3/2}{(s-3/2)^2-\left(\sqrt{\frac{15}{4}}\right)^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(s-3/2)^2-\left(\sqrt{\frac{15}{4}}\right)^2}\right]$$

$$-11/4\;\frac{1}{(s-3/2)^2-15/4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s}+\frac{3}{4}\cdot\frac{s-3/2}{(s-3/2)^2-\frac{15}{4}}-\frac{11}{8}\;\frac{1}{\left((s-3/2)^2-15/4\right)}$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{1}{4}H(t)+\frac{3}{4}e^{3/2t}\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{15}{4}}t\right)H(t)-\frac{11}{8}\operatorname{sh}\left(\sqrt{15/4}\,t\right)\sqrt{4/15}\,H(t)$$

$$Z(s) = \frac{\begin{vmatrix} s+2 & -2/s+1 \\ s & 0 \end{vmatrix}}{(s+2)(s+1)-6} = \frac{2+s}{(s+2)(s+1)-6}$$

$$= \frac{2+s}{s^2+2s+s+2-6} = \frac{2+s}{(s-3/2)^2-\frac{15}{4}}$$

$$= \frac{s-3/2+3/2+2}{(s-3/2)^2-15/4} = \frac{s-3/2}{(s-3/2)^2-15/4} + \frac{7}{2}\frac{1}{(s-3/2)^2-15/4}$$

$$\boxed{z(t) = ch\left(\sqrt{15/4}\,t\right) e^{3/2t} H(t) + \frac{7}{2} H(t) \cdot sh\left(\sqrt{15/4}\,t\right) \sqrt{\frac{4}{15}}}$$

Escaneado con CamScanner

Ejercicio 1.

(a) Determinar todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que $f(iy) = sh\, y$ para todo $y > 0$.

(b) Especificar el conjunto de valores reales positivos α, β y γ para los cuales $\int_0^\infty \frac{(x+1)^\alpha}{x^\beta(1+x^\gamma)}dx$ converge. Calcular esta integral en el caso $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$ y $\gamma = 2$.

Ejercicio 2.

(a) Sea el problema:

¿qué está la duda de los términos?

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0<x<\pi,\ t>0 \\ u(0,t) = 10 & t \geqslant 0 \\ u(\pi,t) = 15 & t \geqslant 0 \\ u(x,0) = 6\,\mathrm{sen}\,(3x) + a\,x + b & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

Obtener valores a y $b \in \mathbb{R}$ tales que el desarrollo en serie de la solución tenga un número finito de términos. Resolverlo para los valores a y b elegidos.

(b) Calcular la serie de Fourier de $f(t) = \begin{cases} 1+2t & \text{si} \quad -1 \leqslant t < 0 \\ 1-2t & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$.

Estudiar si la serie converge en media cuadrática y deducir el valor de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

Ejercicio 3.

(a) Sea $\mathcal{F}_c[f]$ la transformada de Fourier coseno de una función f. Estableciendo las hipótesis adecuadas sobre f y sus derivadas, deducir la fórmula:

$$\mathcal{F}_c[f''](w) = -w^2\mathcal{F}_c[f](w) - f'(0)$$

(b) Plantear un problema que modelice la temperatura T de régimen estacionario en una lámina homogénea e isótropa que ocupa la región del primer cuadrante del plano xy con el borde $x = 0, y > 0$ aislado y la temperatura $T(x,0)$ de valor 1 si $0 < x < 1$ y de valor 0 si $x > 1$. Resolver dicho problema.

Ejercicio 4.

(a) Resolver el siguiente sistema utilizando transformada de Laplace:

$$\begin{cases} x''(t) + y'(t) = 2H(t) \\ 2x'(t) + 2y'(t) = 6H(t) \end{cases} \quad \text{con } x(0^+) = x'(0^+) = 0,\ y(1) = 1$$

lo hice con $y(0^+) = 1$

siendo $H(t)$ la función de Heaviside.

(b) Demostrar las propiedades utilizadas en el cálculo de las transformadas de x'' y de x', enunciando claramente las condiciones que debe cumplir $x(t)$

para resolver con $y(1) = 1$ basta con mantener a $y(0^+)$ como cte hasta el final y luego evaluar

$\boxed{\text{si } x' \text{ es cont a trozos}}$: $\lim_{R\to+\infty} \int_0^R x(t)\, e^{-st}\, dt$ = f es cont en todo $t \geq 0$ = (límite lo expresamos como tenemos)

4) b)

$$\mathcal{L}(x'(t)) = \int^{+\infty} x'(t)\, e^{-st}\, dt = \lim_{R\to+\infty} \left[x(t)\, e^{-st} \Big|_0^R - \int_0^R x(t)(-s e^{-st}) dt \right]$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = e^{-st} & dv = x'(t)\, dt \\ du = -s e^{-st}\, dt & v = x(t) \end{array}}$$

=

$$\underbrace{\lim_{R\to+\infty} x(R)\, e^{-sR}}_{=0 \text{ dado que:}} - x(0) + \underbrace{sX(s)}_{\text{si } x(t) \text{ es integrable en } \mathbb{R}} \Rightarrow \boxed{X'(s) = sX(s) - x(0)}$$

Si f es de orden exponencial:

$\exists\, M, x_0, t_0$ / ctes. $\quad |f(t)| \leq M e^{x_0 t} \quad \forall t > t_0 \qquad t_0 = 0$

$$\Downarrow$$

$$|e^{-st}|\, e^{-x_0 t} |f(t)| \leq M |e^{-st}| \quad \forall t > t_0$$

$$\Downarrow$$

$$|e^{-st} f(t)| \leq M e^{(-s+x_0)t} \quad \forall t > t_0$$

$$|e^{-sR} f(R)| \leq M e^{-(s-x_0)R} \quad \forall R > t_0$$

y si tomo $\lim R \to +\infty$:

$$\lim_{R\to+\infty} |e^{-sR} f(R)| \leq \lim_{R\to+\infty} M e^{-(s-x_0)R} = 0 \qquad \boxed{\text{Si } s > x_0}$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} |e^{-sR} f(R)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{R\to+\infty} e^{-sR} f(R) = 0$$

$x''(t)$ cpp

$$\mathcal{L}(x''(t)) = \int_0^{+\infty} x''(t)\, e^{-st}\, dt \overset{\downarrow}{=} \lim_{R\to+\infty} \int_0^R x''(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \underbrace{\lim_{R\to+\infty} e^{-sR} x'(R)}_{0 \text{ por co justatués}} - x'(0) + s \underbrace{\int_0^{+\infty} x'(t)\, e^{-st}\, dt}_{X'(s) = sX(s) - x(0)}$$

f' es cont $\forall t \geq 0$

Si f' es cpp al menos. x(t) es integrable en R y de orden exp.

$$= s^2 X(s) - s\,x(0) - x'(0)$$

Pide f' y f cont y de orden exp.
f'' es cpp.

a) $\begin{cases} x''(t) + y'(t) = 2H(t) \\ 2x'(t) + 2y'(t) = 6H(t) \end{cases}$

$\mathcal{L} \Big\downarrow \begin{cases} s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + sY(s) - y(0) = \dfrac{2}{s} \\ 2sX(s) - 2x(0) + 2sY(s) - 2y(0) = \dfrac{6}{s} \end{cases}$

$\begin{cases} s^2 X(s) + sY(s) - 1 = 2/s \\ 2s X(s) + 2sY(s) - 2 = 6/s \end{cases}$

Armo un sist $C z = R$.
donde

$$C = \begin{bmatrix} s^2 & s \\ \underbrace{2s}_{C_1} & \underbrace{2s}_{C_2} \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 2/s + 1 \\ 6/s + 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{|R \ C_2|}{|C|} \qquad Y(s) = \frac{|C_1 \ R|}{|C|} \qquad |C| = 2s^3 - 2s^2 = 2(s-1)s^2$$

$$\begin{vmatrix} R & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2/s+1 & s \\ 6/s+2 & 2s \end{vmatrix} = (2/s+1)2s - s(6/s+2)$$

$$= 2+2s-6-2s = -4$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{-4}{2(s-1)s^2}$$

Propongo por fracc simples:

$$\frac{\cancel{-4}\,2}{\cancel{2}(s-1)s^2} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s-1}$$

$$= \frac{A+Bs}{s^2} + \frac{C}{s-1} = \frac{(A+Bs)(s-1)+Cs^2}{s^2(s-1)}$$

$$= \frac{As - A + Bs^2 - Bs + Cs^2}{s^2(s-1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow -A = -2 \rightarrow \boxed{A=2} \\ A-B=0 \rightarrow \boxed{B=2} \\ B+C=0 \rightarrow \boxed{C=-2} \end{array}\right\} X(s) = \left[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}\right]2$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = 2t\,H(t) + 2H(t) - 2\cdot H(t)e^{t}}$$

Busco $Y(s)$:

$$\begin{vmatrix} C_1 & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s^2 & 2/s+1 \\ 2s & 6/s+2 \end{vmatrix} = s^2(6/s+2) - 2s(2/s+1)$$

$$= 6s + 2s^2 - 4 - 2s$$

$$= 4s + 2s^2 - 4$$

$$= 2(s^2+2s-2)$$

2

$$\Rightarrow Y(S) = \frac{\cancel{2}(S^2+2S-2)}{\cancel{2}(S-1)S^2} = \frac{A}{S^2} + \frac{B}{S} + \frac{C}{S-1}$$

$$= \frac{AS+B}{S^2} + \frac{C}{S-1} = \frac{(AS+B)(S-1)+CS^2}{S^2(S-1)}$$

$$= \frac{AS^2+BS-AS-B+CS^2}{S^2(S-1)}$$

$$\begin{cases} A+C=1 \longrightarrow \boxed{C=1} \\ B-A=2 \longrightarrow \boxed{A=0} \\ -B=-2 \longrightarrow \boxed{B=2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(S) = 2/S + 1/(S-1)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y(t) = 2H(t) + H(t)e^t}$$

3

$$\mathcal{F}_c(f'') = \int_0^{+\infty} f''(t)\cos(\omega t)\,dt = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R f''(t)\cos(\omega t)\,dt$$

$u = \cos(\omega t) \to du = -\operatorname{sen}(\omega t)\,\omega$

$dv = f''(t)\,dt \to v = f'(t)$

$$= \lim_{R\to+\infty} f'(t)\cos(\omega t) - f'(0) + \underbrace{\int_0^R \omega \operatorname{sen}(\omega t) f'(t)\,dt}_{\omega \mathcal{F}_s(f')}$$

Si f' abs int en $(0,\infty)$

Busco

$$\mathcal{F}_s(f') = \int_0^{+\infty} f'(t)\operatorname{sen}(\omega t)\,dt = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R f'(t)\operatorname{sen}(\omega t)\,dt$$

$u = \text{sen}(\omega t) \to du = \omega\cos(\omega t)$

$dv = f'(t)\,dt \to v = f(t)$

$$\mathcal{F}_S(f') = \left[\lim_{R\to+\infty} f(t)\,\text{sen}(\omega t)\right] - \omega \underbrace{\int_0^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt}_{\mathcal{F}_C(f) \text{ si } f \text{ es abs int en } (0,\infty)}$$

$$\mathcal{F}_S(f') = -\omega\,\mathcal{F}_C(f)$$

$\lim_{R\to+\infty} f(t) = 0$, f abs int en $(0,\infty)$

$$\Rightarrow \mathcal{F}_C(f'') = \omega\,\mathcal{F}_S(f') - f'(0) = -\omega^2\mathcal{F}_C(f) - f'(0)$$

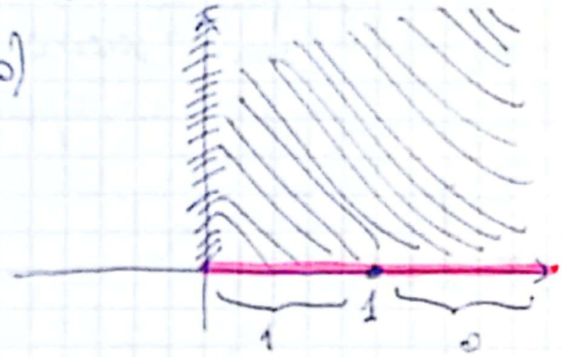
si $\lim_{R\to+\infty} f'(t) = 0$

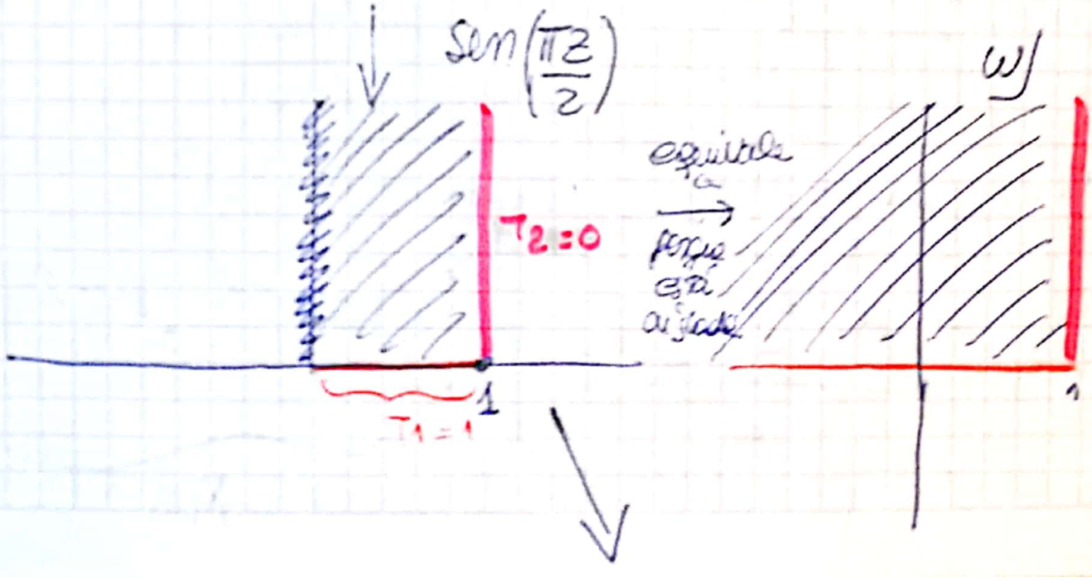
si $\lim_{R\to+\infty} f(t) = 0$

f y f' abs integ. en $(0,\infty)$

b)

Temperatura en una lámina isótropa y homogénea.

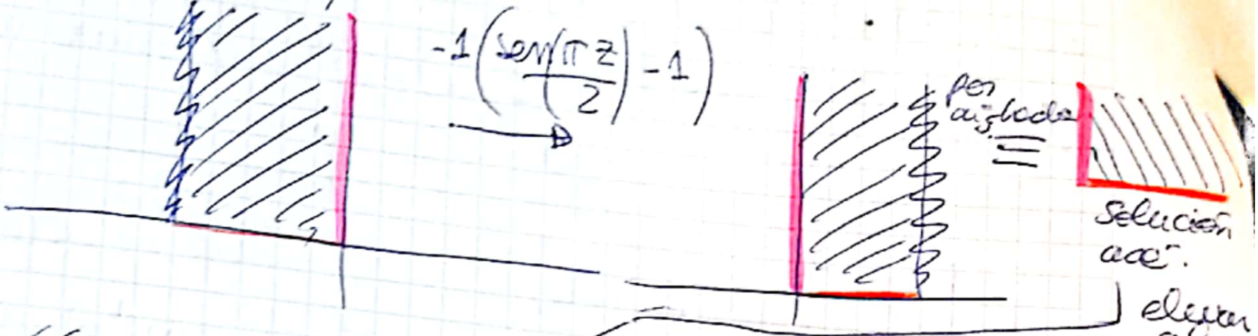




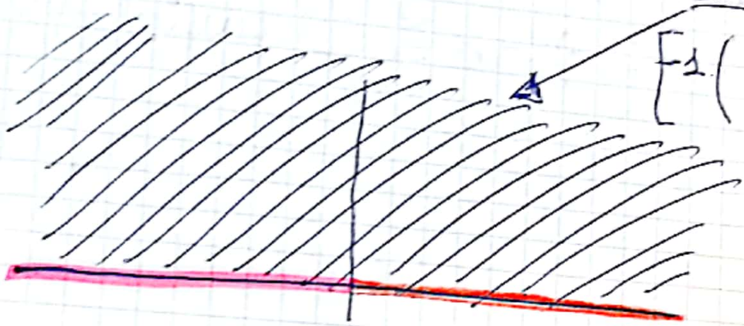
③

... dependen de $r = \sqrt{x^2+y^2}$.
... iendo u la función

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) - 1$



$\left[-1\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) - 1\right)\right]^2$



Nota: no queda exactamente en $y>0$ sin aislar, sino que al estar aislado, es equivalente a trabajar con ese semiplano ya que lo "aislado" queda en $y>0$, no importa.

La solución para el semiplano es:

$h(\theta, r) = A\theta + B$

$h(0, r) = B = 1.$

$h(1, r) = A\frac{\pi}{2} + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{A = -\frac{2}{\pi}}$

$\Rightarrow h(\theta, r) = -\frac{2}{\pi}\theta + 1.$ $\quad \theta \to \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}(T(z))}{\operatorname{Re}(T(z))}\right).$

$$T(z) = \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) - 1\right)^2 = \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(x+iy)\right) - 1\right)^2$$

$$= \left[\frac{i e^{-\frac{i\pi z}{2}} - i e^{\frac{i z\pi}{2}}}{2} - 1\right]^2 = \left[\underbrace{\frac{i}{2}\left[e^{-\frac{i\pi}{2}(x+iy)} - e^{\frac{i\pi}{2}(x+iy)}\right]}_{h(z)} - 1\right]^2 \quad (*)$$

$$e^{-\frac{i}{\pi}\pi(x+iy)} = e^{-ix\frac{\pi}{2}+y\frac{\pi}{2}} = e^{y\frac{\pi}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}(x+iy)} = e^{ix\frac{\pi}{2}-y\frac{\pi}{2}} = e^{-y\frac{\pi}{2}}\left[\cos(\pi/2\,x) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]$$

$(*)$

$$\Rightarrow \left[\frac{i}{2}\left(e^{y\pi/2} - e^{-y\pi/2}\right)\cos(\pi/2\,x) + \left(e^{y\pi/2} - e^{-y\pi/2}\right)(-i)(i)\,\mathrm{sen}(\pi/2\,x) - 1\right]^2$$

$$-\frac{\left(e^{y\pi/2} - e^{-y\pi/2}\right)}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1 = \mathrm{Re}\,(h(z))$$

$$\frac{\left(e^{y\pi/2} - e^{-y\pi/2}\right)}{2}\cos(\pi/2\,x) = \mathrm{Im}\,(h^{\circ}(z))$$

$$\Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad z = x+iy$$

$$x^2 - y^2 = \frac{\left(e^{y\pi/2} - e^{-y\pi/2}\right)^2}{4}\left[\left(\mathrm{sen}(\pi/2\,x) - 1\right)^2 - \cos(\pi/2\,x)^2\right]$$

$$\mathrm{Re}(T(z)) = \frac{\overbrace{e^{y\pi/2} - e^{-y\pi/2}}}{4}\left[\mathrm{sen}^2(\pi/2\,x) - 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \cos^2(\pi/2\,x)\right]$$

$$\mathrm{Im}(T(z)) = 2\left[\left[\frac{e^{y\pi/2} - e^{-y\pi/2}}{2}\right]\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1\right]\frac{e^{y\pi/2} - e^{-y\pi/2}}{2}\cos(\pi/2\,x)$$

$$\Rightarrow T(x,y) = -2/\pi\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}(T(z))}{\mathrm{Re}(T(z))}\right) + 1$$

(4)

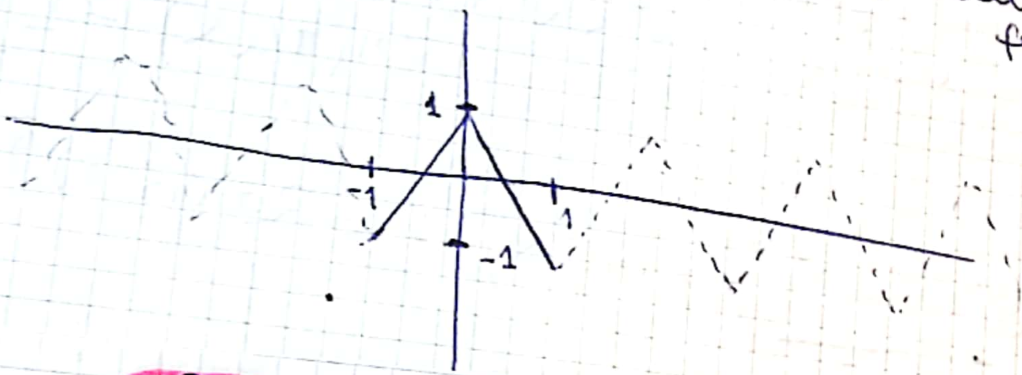
... que sólo dependen de $r = \sqrt{x^2+y^2}$.
... que $u(x,y)=2$, siendo u la función
... circunferencia de radio 1

② b)

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{1}\right)dt$$

$$= \int_{-1}^{0}(1+2t)\cos(n\pi t)\,dt$$

$$+ \int_{0}^{1}(1-2t)\cos(n\pi t)\,dt$$ sería una forma



es par

$$a_n = \boxed{\int_{-1}^{0}\cos(n\pi t)\,dt} + 2\int_{-1}^{0} t\cos(n\pi t)\,dt + \boxed{\int_{0}^{1}\cos(n\pi t)\,dt} - 2\int_{0}^{1} t\cos(n\pi t)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1}\cos(n\pi t)\,dt + 2\left[\left.\frac{t\,\mathrm{sen}(n\pi t)}{n\pi}\right|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{sen}(n\pi t)}{n\pi}dt\right]$$

$$- 2\left[\left. t\,\mathrm{sen}(n\pi t)\right|_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\frac{\mathrm{sen}(n\pi t)}{n\pi}dt\right]$$

$$= \underbrace{\left.\frac{\mathrm{sen}(n\pi t)}{n\pi}\right|_{-1}^{1}}_{0} + 2\left[\left.+\frac{\cos(n\pi t)}{(n\pi)^2}\right|_{-1}^{0}\right] - 2\left[\left.\frac{\cos(n\pi t)}{(n\pi)^2}\right|_{0}^{1}\right]$$

$$= \frac{2[1-(-1)^n]}{(n\pi)^2} - 2\left[\frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2}\right] = \frac{4(1-(-1)^n)}{(n\pi)^2}$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{\text{par}} \underbrace{\operatorname{sen}(n\pi t)}_{\text{impar}}}_{\text{impar en int. sim} \Rightarrow \text{ es } 0} dt = 0$$

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt \underset{\text{par}}{=} 2\int_0^1 f(t)\,dt = 2\int_0^1 (1-2t)\,dt$$

$$= 2\cdot\left[t - \frac{\cancel{2}t^2}{\cancel{2}}\Big|_0^1\right] = 2\cdot[1-1-0+0] = 0$$

$$\Rightarrow S_f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\cdot(1-\cos(n\pi t))}{n\pi^2}$$

Si n es par:

$a_n = 0$

Si n es impar:

$a_n = \frac{8}{(n\pi)^2}$

$$\Rightarrow S_f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8 \cos((2k-1)\pi t)}{\pi^2 (2k+1)^2}$$

$n = 2k+1$

La serie converge en media cuadrática porque $\int_{-1}^{1} |f|^2 dt < \infty$ vale $2\int_0^1 (1-2t)^2 dt = 2\int_1^{-1} \frac{u^2\,du}{-2}$ $\quad u = 1-2t$, $du = -2dt$

5

$$= -\frac{u^3}{3}\Big|_1^{-1} = 2/3$$

$\Rightarrow$ Por Teorema de Parseval:

$$\int_{-L}^{L} |f(t)|\,dt = \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right) L$$

en este caso $L=1$ entonces:

$$\int_{-1}^{1} |f(t)|\,dt = \frac{2}{3} = 0 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8}{(2k+1)^2\pi^2} \cos((2k+1)\pi t)$$

Con lo cual:

Por Teorema de Dirichlet (conv puntual)

- $Sf_f(x)$ converge a $f(x)$ $\forall x \in (-1,1)$ (f cont allí)
  $\hookrightarrow$ si f es cpp en $[-1,1]$ y tiene deriv lat finitas
- $Sf(f)$ converge al promedio de los lim. laterales en $x=-1$ y $x=1$.

entonces:

$$Sf(0) = \frac{2}{3} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8^2}{(2k+1)^4\pi^4} = f(0)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{\pi^4}{\cancel{8^2}_{32}} = \frac{\pi^4}{96}.$$

... que sólo dependen de $r=\sqrt{x^2+y^2}$.
... $(\pi, y)=2$, siendo u la función
... encia de radio 1

a) $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t)=10 \\ u(\pi,t)=15 \\ u(x,0) = 6\,\text{sen}(3x) + ax + b \end{cases}$

$u_t = u_{xx} \rightarrow$ ecuación de difusión $k=1$

$0<x<\pi,\ t>0$

$\rightarrow t \geq 0$] temp en los extremos de la barra.

$0 \leq x \leq \pi$

↳ temp inicial.

Propongo:

$$u(x,t) = \underbrace{v(x)}_{\text{sol. perm}} + \underbrace{w(x,t)}_{\text{soluc. transit.}} \qquad u_t \to 0,\ t \to \infty$$

$\Rightarrow$ $V_{xx}=0 \rightarrow V(x) = Ax+B$

$V(0)=10 \longrightarrow B=10$

$V(\pi)=15 \rightarrow A = 5/\pi$

$A\pi + 10 = 15$

con lo cual

$u_t = w_t(x,t) = w_{xx}(x,t)$

$u(0,t) = 10 = V(0) + w(0,t) \rightarrow w(0,t)=0$

$u(\pi,t) = 15 = V(\pi) + w(\pi,t) \rightarrow w(\pi,t)=0$

$u(x,0) = f(x) = V(x) + W(x,0)$

$\rightarrow W(x,0) = 6\,\text{sen}(3x) + ax + b - \frac{5}{\pi}x - 10$

Ahora es equivalente a resolver el sgte sistema:

$w_t(x,t) = w_{xx},\ w(0,t) = w(\pi,t) = 0$

$w(x,0) = f(x) - V(x)$.

Propongo $W_p(x,t) = X(x)\,T(t)$

$$W_{xx} = X''(x)\,T(t) = W_t = X(x)\,T'(t).$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Si $\lambda = 0 \Rightarrow X'' - X\lambda = 0$

$= X'' = 0$ tiene sc $ax+b$

y para cumplir

$X(0) = X(\pi) = 0$

$a = b = 0 \Rightarrow$ no es sc.

Si $\lambda > 0 \Rightarrow X'' - X\lambda = 0$

tiene sc $X(x) = a\,e^{-\sqrt{\lambda}x} + b\,e^{\sqrt{\lambda}x}$

y con $X(0) = X(\pi) = 0$

a y b deben ser 0

$\Rightarrow$ no es sc.

Si $\lambda < 0$

$\Rightarrow X'' - \lambda X = 0$ con $\lambda = -\omega^2$

tiene sc $X(x) = a\cos(\omega x) + b\,\mathrm{sen}(\omega x)$

Si $X(0) = 0 = a$

$X(\pi) = 0 = b\,\mathrm{sen}(\omega\pi)$

$\Rightarrow \omega \in \mathbb{N}$ $\boxed{\omega = k}$

Reemplazando:

$T'(t) + k\,T(t) = 0$

tiene sc $T(t) = c\,e^{-k^2 t}$

entonces $\omega(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} B_m \operatorname{sen}(kx)\, e^{-k^2 t}$

donde $\omega(x,0) = f(x) - V(x)$ y $B_m = 2\int_0^{\pi} (f(x) - V(x)) \operatorname{sen}(kx)\,dx$

y además:

$u(x,t) = V(x) + \omega(x,t)$

$u(x,0) = V(x) + f(x) - V(x) = f(x)$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} B_m \operatorname{sen}(k\cancel{x})\, e^{-k^2 t} = 6 \operatorname{sen}(3x) + ax + b$

Si $a = 5/\pi$ y $b = 10$ y $B_m = 0 \ \forall k \neq 3$

Se cumple lo pedido.

(1) b) $\int_0^{+\infty} \underbrace{\boxed{\frac{(x+1)^{\alpha}}{x^{\beta}(1+x^{\gamma})}}}_{f(x)}$ (c) y calcular la integral cuando $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$ y $\gamma = 2$.

$g(x) = \frac{1}{x^{\beta-\gamma-\alpha}}$ $\qquad \int_0^{\infty} f = \int_0^1 f + \int_1^{\infty} f$ si $\exists$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ $\qquad \int_1^{\infty} f(x)$ (c) dado que $\int_1^{\infty} g(x)$ c

sii

$\beta + \gamma - \alpha > 1$.

Para $\int_0^1 f$ comparo f con $\frac{1}{x^\beta}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{h(x)} = 1$ y $\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}$ (c) sii $\beta<1$

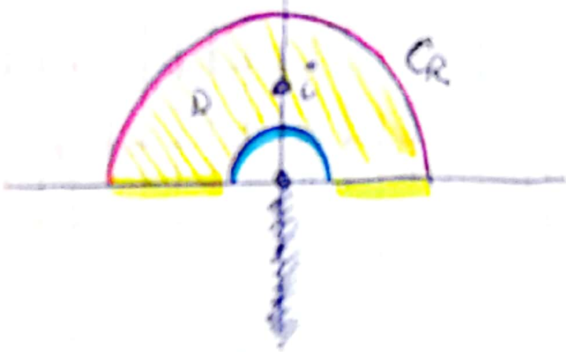
Con lo cual $\int_0^\infty f$ (c) sii $\beta+\gamma-\alpha>1$
y $\beta<1$
$\alpha>0, \beta>0, \gamma>0$

Busco $\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)\,dx}{x^{1/2}(1+x^2)}$

Sea $f(z) = \frac{z+1}{z^{1/2}(1+z^2)}$ $=$ $|z|^{1/2} e^{\frac{i \arg z}{2}}$

$-\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3}{2}\pi$

Considero:



$\Gamma = \partial D$

$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,i) = 2\pi i \cdot \lim_{z\to i} \frac{(z-i)(z+1)}{z^{1/2}(1+z^2)}$

$= 2\pi i \cdot \lim_{z\to i} \frac{(z+1)}{z^{1/2}(z+i)} = \frac{i+1}{i^{1/2}\,\cancel{2i}} \cdot \cancel{2\pi i} = \frac{(i+1)\pi}{e^{i\pi/4}}$

$= \int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_\varepsilon^R f(x)\,dx$ (*)

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq \int_{C_R} |f(z)|\,dz \underset{\uparrow}{\leq} \frac{R+1}{R^{1/2}(1-R^2)} \cdot \pi R \xrightarrow{R\to\infty} 0 \quad (*)$$

Lema ML

$$|f(z)| = \frac{|z+1|}{|z|^{1/2}|1+z^2|} \leq \frac{|z|+|1|}{|z|^{1/2}\,||1|-|z|^2|}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{en } C_R}}{=} M = \frac{R+1}{R^{1/2}(1-R^2)}$$

$(*)$

$$\lim_{R\to\infty} \frac{(R+1)\pi R}{R^{1/2}(1-R^2)} = \underbrace{\lim_{R\to\infty} \frac{(R+1)\pi R}{(1-R^2)}}$$

$$\bullet \underbrace{\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{1/2}}}_{0} = 0 \qquad \lim_{R\to\infty} \frac{\cancel{R^2}(\overbrace{1/R+1}^{1})\pi}{\cancel{R^2}(\underbrace{-1+1/R^2}_{-1})}$$

$$\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz\right| \leq \frac{(\varepsilon+1)\pi\varepsilon}{\varepsilon^{1/2}(1-\varepsilon^2)} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(\varepsilon+1)\pi\varepsilon}{\varepsilon^{1/2}(1-\varepsilon^2)} = \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon+1}{1-\varepsilon^2}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0} \pi\varepsilon^{1/2}}_{0} = 0$$

$z = \rho e^{i\pi}$

$$\int_R^{\varepsilon} \frac{(\rho e^{i\pi}+1)e^{i\pi} d\rho}{\rho^{1/2} e^{i\pi/2}(1+\rho^2 \underbrace{e^{i2\pi}}_{1})} = -i \underbrace{\int_R^{\varepsilon} \frac{1-\rho}{\rho^{1/2}(1+\rho^2)} d\rho}_{\in\mathbb{R}}$$

$$\left.\begin{aligned} d\varphi &= -d\rho \\ \varphi &= -\rho \end{aligned}\right\} \text{no funciona así tampoco}$$

$z = \rho$

$$\int_{\varepsilon}^{R} \frac{1+\rho}{\sqrt{\rho}(1+\rho^2)} d\rho$$

$\Rightarrow$ con $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$

$$\int_R^{\varepsilon} \frac{1+\rho \quad d\rho}{\rho^{1/2}(1+\rho^2)} - i \int_R^{\varepsilon} \frac{1-\rho \quad d\rho}{\rho^{1/2}(1+\rho^2)} = \frac{\pi(i+1)}{e^{i\pi/4}}$$

$$= \pi(i+1)\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

$$= \pi\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1+x}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \pi\sqrt{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)} dx = 0$$

Escaneado con CamScanner

a) <u>Principio de Identidad</u>

Sean f y g holomorfas en $D \subseteq \mathbb{C}$, sea $D_0 = \{ z \in \mathbb{C} / f = g \}$ si D_0 tiene algún punto no aislado $\Rightarrow f = g \ \forall z \in D$.

<u>En base a esa definición:</u>

Sean f, g func. enteras,

$D_0 = \{ z \in \mathbb{C} / z = x+iy, \ y>0, \ x=0 \}$

y sea $f = g \ \forall z \in D_0$, si encuentro esa g, que cumple esta condición $\Rightarrow f = g$ en $\mathbb{C}$

Con encontrar g / $g(iy) = sh(y)$ bastaría para saber de f.

$g(z) = -i\,sen(z)$ cumple esta condición, con lo cual $f = g = -i\,sen(z)$, la única func. holomorfa en $\mathbb{C}$ que cumple con lo pedido.

9

Ejercicio 1.

(a) Caracterizar las funciones armónicas u que sólo dependen de $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Describir el conjunto de todos los $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tales que $u(x,y)=2$, siendo u la función armónica en $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x^2+y^2<4\}$ que vale 1 en la circunferencia de radio 1 y vale 3 en la circunferencia de radio 2.

(b) Analizar unicidad de solución en el siguiente problema y resolverlo:

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad -\infty<x<+\infty, \quad -\pi/4<y<\pi/4$$
$$u(x,-\pi/4)=u(x,\pi/4)=\begin{cases} 1 & x\geqslant 0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

Ejercicio 2.

(a) Dada la función $f(t)=\begin{cases} at+b & \text{si } -\pi<t<0\\ t^2+c & \text{si } 0\leqslant t<\pi\end{cases}$, hallar valores para a, b y c de forma tal que la serie de Fourier de f de período 2π converja uniformemente en $\mathbb{R}$.

(b) Una barra de longitud 1, está apoyada sobre el eje x y tiene su extremo izquierdo en $x=0$. Ambos extremos están aislados y su temperatura inicial toma el valor $x(1-x)$ para cada $x\in(0,1)$. Sabiendo que el coeficiente de difusión térmica es $k=1$, hallar la evolución en el tiempo de la temperatura de la barra.

Ejercicio 3.

(a) Probar que si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es derivable y absolutamente integrable con $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0$ entonces $\mathcal{F}[f'](w)=i\,w\mathcal{F}[f](w)$.

(b) Analizar si existe la transformada de Fourier de $f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ para cada $n\in\mathbb{N}$. En los casos afirmativos, calcularla.

Ejercicio 4.

(a) Probar que si f es continua a trozos y de orden exponencial, existe su transformada de Laplace. ¿Cuál es el mayor dominio de holomorfía de dicha transformada?

(b) Resolver, aplicando transformada de Laplace:

$$5y(t)+y'(t)+6\int_0^t y(x)\,dx=\begin{cases} t & t\in(0,1)\\ 0 & t\geqslant 1\end{cases} \quad ; \quad y(0)=0$$

Supongo $f(t)=t$ $\quad \mathcal{L}\{t\,f'(t)\}$ cuánto vale?

Llamo a $f'(t)=g(t) \Rightarrow \boxed{t\,g(t) \xrightarrow{L} -G'(s)}$

Para esto necesito $G(s)$.

$G(s)=\mathcal{L}(f'(t))=sF(s)-f(0+)$ cte

$\boxed{G'(s)=1\cdot F(s)-s\cdot F'(s)}$

Con lo cual: $t\,g(t)\xrightarrow{L} -F(s)+sF'(s)$

$$m(t) = \frac{5 \cdot e^{j3t}}{t^2 - 4t + 13}$$

Paso 1: Comp. cuadrados (me evito ℂ)

$$t^2 - 4t + 13 = (t-2)^2 + 9$$

Paso 2: Busco la función más parecida:

$$g(t) = \frac{1}{a^2 + t^2} \xrightarrow{F} G(\omega) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}$$

Noto que:

$$\varphi(t) = g(t-2) = \frac{1}{(t-2)^2 + 9} \xrightarrow{F} \varphi(\omega) = e^{-j2\omega} \cdot \frac{\pi}{3} e^{-3|\omega|}$$

con $a = 3$

Prop shift en dom tiempo:

$$\boxed{f(t-a) \xrightarrow{F} e^{-ja\omega} F(\omega)}$$

Nuestro caso:

$$= g(t-2) \to e^{-j2\omega} \cdot G(\omega)$$

Luego: $m(t) = 5\,\varphi(t) \cdot e^{j3t} \xrightarrow{F} 5\,\varphi(\omega - 3)$

Prop shift en dom de la frecuencia:

$$\boxed{e^{jat} f(t) \xrightarrow{F} F(\omega - a)}$$

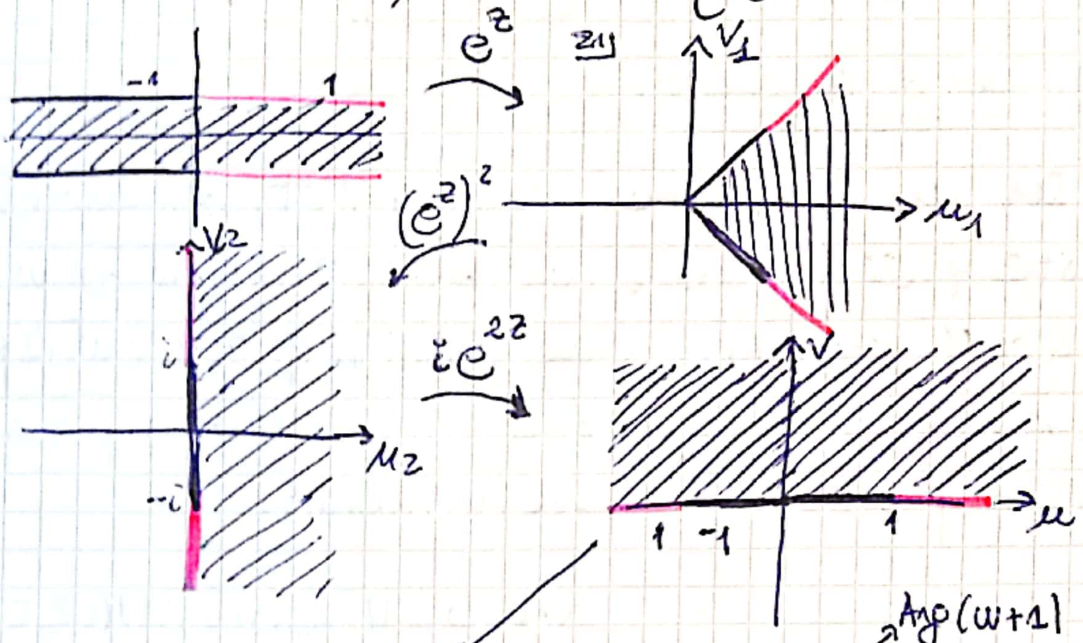
Por lo tanto

$$m(t) \xrightarrow{F} 5\, e^{-j2(\omega-3)} \cdot \frac{\pi}{3} e^{-3|\omega-3|}$$

Escaneado con CamScanner

(1) b) $u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad -\infty < x < +\infty \qquad -\pi/4 < y < \pi/4$

$$u(x, -\pi/4) = u(x, \pi/4) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



La solución a este problema es $A\underbrace{\theta_1}_{\text{Arg}(w+1)} + B\underbrace{\theta_2}_{\text{Arg}(w-1)} + C$ donde A, B y C son ctes reales. Es armónica puesto que es la parte imaginaria de $A\ln(w+1) + B\ln(w-1) + C$.

$$\Rightarrow \quad A \cdot \pi + B \cdot \pi + C = 1 \quad \to \quad A = -B$$

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C = 1 \quad \to \quad \boxed{C = 1}$$

$$A \cdot 0 + B \cdot \pi + C = -1 \longrightarrow B\pi + 1 = -1$$

$$B\pi = -2$$

$$\boxed{A = 2/\pi} \longleftarrow \boxed{B = -2/\pi}$$

$$\Rightarrow u(w) = \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}(w+1)}{\operatorname{Re}(w+1)}\right) - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}(w-1)}{\operatorname{Re}(w-1)}\right) + 1$$

con $w = u + iv = ie^{2z} = i\left[e^{2x}\cos(2y) + ie^{2x}\operatorname{sen}(2y)\right]$

$$= \underbrace{-e^{2x}\operatorname{sen}(2y)}_{u} + i\underbrace{e^{2x}\cos(2y)}_{v}$$

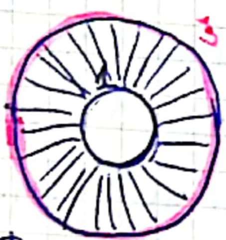
(1)

$$\Rightarrow u(x,y) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{-e^{2x}\cos(2y)}{e^{2x}\operatorname{sen}(2y)+1}\right) - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{-e^{2x}\cos(2y)}{e^{2x}\operatorname{sen}(2y)-1}\right)+1$$

Unicidad de la solución

Al ser un problema de Dirichlet, la solución existe y es única. Un problema de Dirichlet es aquel que busca una función ϕ que satisfaga la ecuación de Laplace y toma valores prescritos sobre la frontera C de su dominio.

a)



$\Delta u = 0$, $u(1,\theta) =$, $u(2,\theta) = 3$

$\downarrow$ en coord cilíndricas.

$$u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_{\rho} = 0$$

$$\Rightarrow u(\rho,\theta) = A\ln\rho + B.$$

es armónica ya que es la parte real de

$$\Omega = u + iv = A\ln z + B$$

$$\Omega = A\ln\rho + B + iA\theta$$

u es el potencial eléctrico en el capacitor.

$$u(1,\theta) = A\ln(1) + B = 1 \rightarrow \boxed{B = 1}$$

$$u(2,\theta) = A\ln(2) + 1 = 3 \rightarrow \boxed{A = \frac{2}{\ln(2)}}$$

$$\Rightarrow u(\rho,\theta) = \frac{2}{\ln(2)}\ln\rho + 1 \rightarrow \boxed{u(x,y) = \frac{2}{\ln(2)}\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+1}$$

Busco los (x_0, y_0) donde $\mu(x_0, y_0) = 2$

$$\frac{\cancel{2}}{\ln(2)} \ln\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right) + \frac{1}{2} = \cancel{2}$$

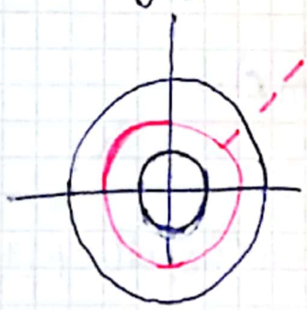
$$\frac{\ln\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right)}{\ln(2)} = \frac{1}{2}$$

$$\ln\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\sqrt{x_0^2+y_0^2} = e^{\frac{1}{2}\ln(2)} = \left(e^{\ln(2)}\right)^{1/2} = \sqrt{2}$$

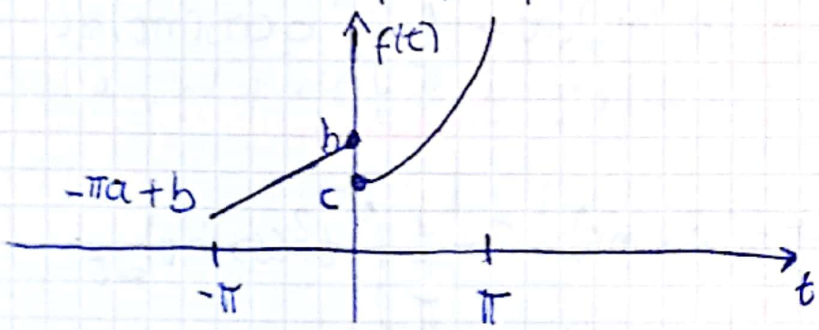
$$\Rightarrow \boxed{x_0^2+y_0^2 = 2}$$

Rta: Son los $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ / $x_0^2+y_0^2 = 2$



② a) $f(t) = \begin{cases} at+b & \text{si } -\pi < t < 0 \\ t^2+c & \text{si } 0 \le t < \pi \\ f(t) = f(t+2\pi) \end{cases}$

Buscar la serie de Fourier de f. que converge uniformemente en $\mathbb{R}$ (con a, b, c a determinar.



Para que haya convergencia uniforme:

1). f debe ser continua en $[-\pi, \pi]$

2). $f(\pi) = f(-\pi)$

3). f' debe ser continua por tramos.

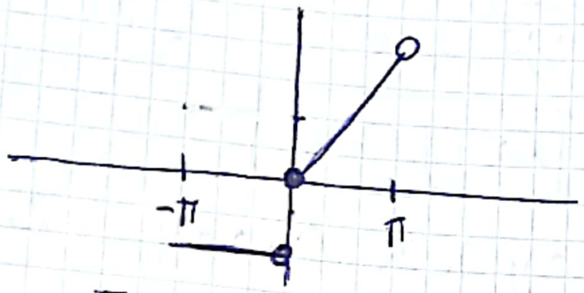
Por 1) $f(0) = b = c$

2) $-\pi a + b = \pi^2 + c$

$$-\pi a = \pi^2 \rightarrow \boxed{a = -\pi}$$

3)

$$f'(t) = \begin{cases} a & \text{si } -\pi \leq t < 0 \\ 2t & \text{si } 0 \leq t < \pi \end{cases}$$



es continua por tramos.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi t + b)\cos(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(t^2 + b)\cos(nt)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi t)\cos(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} b\cos(nt)\,dt$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t^2\cos(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} b\cos(nt)\,dt$$

0, coseno int en un periodo

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\pi t\cos(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t^2\cos(nt)\,dt$$

$$= -\int_{-\pi}^{0} t\cos(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t^2\cos(nt)\,dt = (*)$$

$$\int t\cos(nt)\,dt = \frac{t\,\text{sen}(nt)}{n} - \int \frac{\text{sen}(nt)}{n}\,dt$$

$u = t,\ du = dt$

$dv = \cos(nt)\,dt$

$v = \frac{\text{sen}(nt)}{n}$

$$= \frac{t\,\text{sen}(nt)}{n} + \frac{\cos(nt)}{n^2} + k,\ k \in \mathbb{R}$$

$$\int t^2\cos(nt)\,dt = \frac{t^2\,\text{sen}(nt)}{n} - 2\int t\,\frac{\text{sen}(nt)}{n}\,dt$$

$u = t^2,\ du = 2t\,dt$

$dv = \cos(nt)\,dt$

$v = \frac{\text{sen}(nt)}{n}$

$$= \frac{t^2\,\text{sen}(nt)}{n} - \frac{2}{n}\left[-\frac{t\cos(nt)}{n} + \frac{\text{sen}(nt)}{n^2}\right]$$

$$\int t\,\text{sen}(nt)\,dt = \frac{-t\cos(nt)}{n} - \int\left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right)dt$$

$u = t,\ du = dt$

$dv = \text{sen}(nt)\,dt$

$v = -\frac{\cos(nt)}{n}$

$$= \frac{-t\cos(nt)}{n} + \frac{\text{sen}(nt)}{n^2}$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{0} t\cos(nt)\,dt = \left.\frac{t\,\text{sen}(nt)}{n} + \frac{\cos(nt)}{n^2}\right|_{-\pi}^{0}$$

$$= \frac{1}{n^2} - \left[\frac{\cos(-n\pi)}{n^2}\right] = \frac{1-(-1)^n}{n^2}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2\operatorname{sen}(nt)}{n} + \frac{2t\cos(nt)}{n^2} - \frac{2\operatorname{sen}(nt)}{n^3}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\pi(-1)^n}{n^2}\right] = \frac{2(-1)^n}{n^2}$$

$$\Rightarrow \underset{*}{=} \frac{1-(-1)^n+2(-1)^n}{n^2} = \frac{1+(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{1+(-1)^n}{n^2}}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen}(nt)\,dt$$

la trasl. no hace nada con los b_n ni a_n

$$= \frac{1}{\cancel{\pi}}\int_{-\pi}^{0}(-\cancel{\pi}t)\operatorname{sen}(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\operatorname{sen}(nt)\,dt$$

$$= -\int_{-\pi}^{0} t\operatorname{sen}(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\operatorname{sen}(nt)\,dt$$

$$= \frac{t\cos(nt)}{n} - \frac{\operatorname{sen}(nt)}{n^2}\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\operatorname{sen}(nt)\,dt$$

$$= -\left[\frac{-\pi(-1)^n}{n}\right] + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\operatorname{sen}(nt)\,dt = \frac{\pi(-1)^n}{n} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\operatorname{sen}(nt)\,dt$$

$$\int t^2\operatorname{sen}(nt)\,dt = -\frac{t^2\cos(nt)}{n} - \int -\frac{\cos(nt)}{n}\cdot 2t\,dt$$

$u = t^2 \to du = 2t\,dt$

$dv = \operatorname{sen}(nt)$

$v = -\frac{\cos(nt)}{n}$

$$= -\frac{t^2\cos(nt)}{n} + \frac{2}{n}\int t\cos(nt)\,dt$$

$$= -\frac{t^2\cos(nt)}{n} + \frac{2}{n}\left[\frac{t\operatorname{sen}(nt)}{n} + \frac{\cos(nt)}{n^2}\right]$$

$$= \frac{2\cos(nt)}{n^3} + \frac{2t\operatorname{sen}(nt)}{n^2} - \frac{t^2\cos(nt)}{n}$$

$\Rightarrow \int_0^{\pi} t^2 \operatorname{sen}(nt)\,dt = \dfrac{2\cos(nt)}{n^3} + \dfrac{2t\operatorname{sen}(nt)}{n^2} - \dfrac{t^2\cos(nt)}{n}\Bigg|_0^{\pi}$

$= \dfrac{2(-1)^n}{n^3} - \dfrac{\pi^2(-1)^n}{n} - \left[\dfrac{2}{n^3}\right] \Rightarrow$ $\dfrac{2(\cancel{1}+(-1)^n)}{n^3}+$

$\boxed{b_n = \dfrac{\pi(-1)^n}{n} + \dfrac{2(-1)^n}{n^3} - \dfrac{\pi^2(-1)^n}{n} - \dfrac{2}{n^3}}$ $= \dfrac{(\pi-\pi^2)(-1)^n}{n}$

y

$a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \dfrac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-\pi t+b)\,dt + \int_0^{\pi}(t^2+b)\,dt\right]$

$= \dfrac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\pi t\,dt + b\int_{-\pi}^{\pi} dt + \int_0^{\pi} t^2\,dt\right]$

$= -\int_{-\pi}^{0} t\,dt + 2b + \dfrac{\pi^2}{3} = \dfrac{t^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{0} + 2b + \dfrac{\pi^2}{3} = \pi^2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right) + 2b$

$\boxed{a_0 = 5/6 + 2b}$

Creo que no pedía la serie de Fourier pero de igual forma verifico que converge. Hay algún tipo de error de cuentas en b_n.

b)

$u''_{xx}(x,t) = u'_t(x,t)$ Ecuación de difusión (calor)

$0 < x < 1,\ t > 0$

$u(x,0) = x(1-x)$ $\quad 0 \leq x \leq 1$ temp inicial

$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0,\ t > 0$ extremos aislados.

Propongo $u(x,t) = X(x)T(t)$

$\Rightarrow \quad X''(x)T(t) = T'(t)X(x)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda$$

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 & (1) \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) Si $\lambda = 0$ la solución es $ax+b$, $a,b \in \mathbb{R}$

donde con $X(1) = X(0) = 0$ queda $a = b = 0$,

la sc trivial $\Rightarrow$ no es solución

Si $\lambda > 0$ la solución es:

$X(x) = a\, e^{-\sqrt{\lambda}x} + B\, e^{\sqrt{\lambda}x} \qquad a, B \in \mathbb{R}$

$X(0) = a + b = 0 \rightarrow a = -B$

$X(1) = -B\, e^{-\sqrt{\lambda}} + B\, e^{\sqrt{\lambda}} = 0$

$\Rightarrow B = 0$ Tampoco es solución.

Si $\lambda < 0$ y escribo: $\lambda = -\omega^2$:

$\Rightarrow X(x) = a\, e^{i\omega x} + b\, e^{-i\omega x} \qquad a, b \in \mathbb{R}$

ó $X(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \operatorname{sen}(\omega x)$

$\Rightarrow X'(0) = -\alpha\omega \operatorname{sen}(\omega x) + \omega\beta \cos(\omega x) \Big|_0 = \beta = 0$

$X'(1) = -\alpha\omega \operatorname{sen}(\omega) = 0$

ocurre si $\boxed{\omega = k\pi}$ $\qquad\qquad \Downarrow \; \boxed{\beta = 0}$

$\rightarrow \boxed{X(x) = \beta \operatorname{sen}(k\pi x)}$

Como $\lambda = -\omega^2 = -(k\pi)^2 \Rightarrow T''(t) - \lambda T(t) =$
$T''(t) + (k\pi)^2 T(t) = 0$

cuya solución es $\boxed{T(t) = m\, e^{-(k\pi)^2 t}}$

Entonces resulta:

$$\mu(x,t) = \sum_{m=1}^{+\infty} B_m \operatorname{sen}(k\pi x)\, e^{-(k\pi)^2 t}$$

$$\text{con } B_m = 2\int_0^1 f(x)\operatorname{sen}(k\pi x)\,dx$$

$$B_m = 2\int_0^1 x(1-x)\operatorname{sen}(k\pi x)\,dx$$

$$= 2\int_0^1 x\operatorname{sen}(k\pi x)\,dx - 2\int_0^1 x^2 \operatorname{sen}(k\pi x)\,dx$$

$$\int x\operatorname{sen}(k\pi x)\,dx = -\frac{x\cos(k\pi x)}{k\pi} - \int \operatorname{sen}(k\pi x)\,dx$$

$u = x \quad du = dx$

$dv = \operatorname{sen}(k\pi x)dx$

$v = -\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}$

$$= -x\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi} + \int \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\,dx$$

$$= -x\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi} + \frac{\operatorname{sen}(k\pi x)}{(k\pi)^2}$$

$$2\int_0^1 x\operatorname{sen}(k\pi x)\,dx = -x\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi} + \frac{\operatorname{sen}(k\pi x)}{k\pi^2}\Big|_0^1 \cdot 2$$

$$= -\frac{(-1)^m}{k\pi}\cdot 2$$

$$\int x^2 \operatorname{sen}(k\pi x)\,dx = \frac{-x^2\cos(k\pi x)}{k\pi} - \int \frac{-\cos(k\pi x)}{k\pi} \cdot 2x\,dx$$

$u = x^2 \to du = 2x\,dx$

$dv = \operatorname{sen}(k\pi x)\,dx$

$v = \frac{-\cos(k\pi x)}{k\pi}$

$$= \frac{x^2\cos(k\pi x)}{k\pi} + \frac{2}{k\pi}\int x\cos(k\pi x)\,dx$$

$$\int x\cos(k\pi x)\,dx = x\frac{\operatorname{sen}(k\pi x)}{k\pi} - \int \frac{\operatorname{sen}(k\pi x)}{k\pi}\,dx$$

$u = x \quad du = dx$

$dv = \cos(k\pi x)$

$v = \frac{\operatorname{sen}(k\pi x)}{k\pi}$

$$= \frac{x\operatorname{sen}(k\pi x)}{k\pi} + \frac{\cos(k\pi x)}{(k\pi)^2}$$

$$\Rightarrow \int x^2\operatorname{sen}(k\pi x)\,dx = \frac{x^2\cos(k\pi x)}{k\pi} + \frac{x\operatorname{sen}(k\pi x)}{(k\pi)^2} + \frac{\cos(k\pi x)}{(k\pi)^3}$$

$$\Rightarrow -2\int_0^1 x^2\operatorname{sen}(k\pi x)\,dx = \left[\frac{(-1)^n}{k\pi} + \frac{(-1)^n - 1}{(k\pi)^3}\right](-2)$$

$$\Rightarrow \boxed{B_n = \frac{-4(-1)^n}{k\pi} + \frac{2(1-(-1)^n)}{(k\pi)^3}}$$

(3) a) $\mathcal{F}(f') = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, e^{-jwx}\, dx = (*)$

si f es abs integrable $\Rightarrow \exists\, \mathcal{F}(f)$

$u = e^{-jwx} \Rightarrow du = -jw\, e^{-jwx}\, dx$

$dv = f'(x)\, dx \Rightarrow v = f(x)$

$$\int f'(x)\, e^{-jwx} = f(x)\, e^{-jwx} - \int -jw\, e^{-jwx} f(x)\, dx$$

$$= f(x)\, e^{-jwx} + jw \int f(x)\, e^{-jwx}\, dx$$

$$(*) = \underbrace{f(x)\, e^{-jwx} \Big|_{+\infty}^{-\infty}}_{0 \text{ porque } \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0} + jw \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-jwx}\, dx}_{\mathcal{F}(f)} = jw\, \mathcal{F}(f)$$

b) $\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jwx}}{x^n}\, dx$ existe si:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{x^n} \right| dx < \infty$$

¿ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^n}\, dx$ converge $\forall n \in \mathbb{N}$?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\substack{a \to \infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\substack{a \to \infty \\ b \to +\infty}} \ln(b) - \ln(a) \not\exists$$

Escaneado con CamScanner

Si $n>1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^n}\,dx = \lim_{\substack{a\to -\infty \\ b\to +\infty}} \left.\frac{x^{1-n}}{1-n}\right|_b^a = \lim_{\substack{a\to -\infty \\ b\to +\infty}} \frac{a^{1-n}-b^{1-n}}{1-n} \;\exists$$

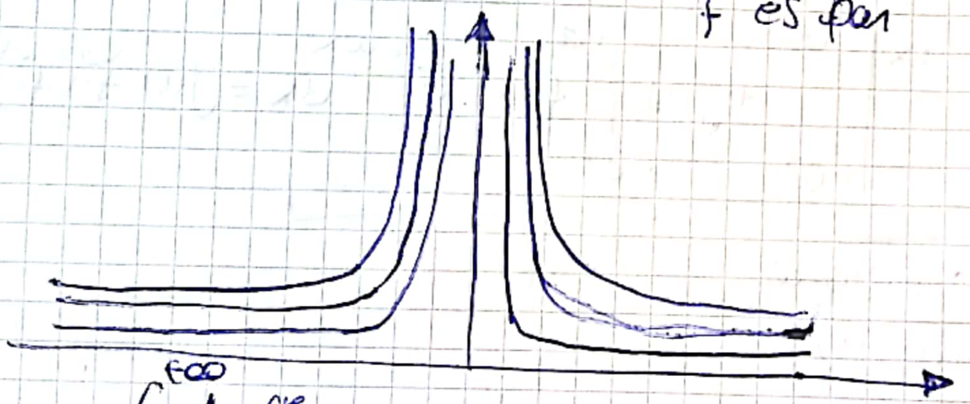
¡Por eso es importante el módulo!

$\frac{1}{|x|^n}$ es una función par, por lo cual:

$$\text{Si } \exists\, VP \Rightarrow VP\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow VP\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|^n} = \lim_{a\to +\infty} \int_{-a}^{a} \frac{1}{|x|^n} = \lim_{a\to +\infty} 2\int_0^a \frac{1}{x^n}\;\nexists$$

f es par



$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|^n}\,dx$ diverge porque presenta una discontinuidad en 0 y si hacemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|^n}\,dx = \lim_{\substack{a\to -\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_a^{0+\varepsilon} \frac{1}{|x|^n} + \lim_{\substack{b\to \infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{0+\varepsilon}^{b} \frac{1}{|x|^n}$$

$$\int \frac{1}{x^n} = \frac{x^{1-n}}{1-n} \Rightarrow \lim_{\substack{b\to \infty \\ \varepsilon\to 0}} \frac{b^{1-n}-\varepsilon^{1-n}}{1-n}\;\nexists$$

Escaneado con CamScanner

4) a) f cont a trozos
f orden exponencial $\Rightarrow \exists\, \mathcal{L}(f)$

¿Cuál es el mayor dominio de holomorfía de la transformada? donde $s = j\omega + \sigma$

$$|\mathcal{L}(f)| = \left|\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt\right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|\, e^{-\sigma t}\, dt$$

$$\leq M \int_0^{+\infty} e^{(x_0-\sigma)t}\, dt = M \int_0^{+\infty} e^{-(\sigma - x_0)t}\, dt$$

$|f(t)| \leq M \cdot e^{x_0 t}$

$$= M \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-(\sigma - x_0)t}\, dt$$

$$= M \lim_{b\to+\infty} \left. \frac{e^{-(\sigma - x_0)t}}{-(\sigma - x_0)} \right|_0^b$$

$$= M \lim_{b\to+\infty} \frac{e^{-(\sigma - x_0)b} - 1}{-(\sigma - x_0)}$$

$$= \frac{M}{\sigma - x_0} \Rightarrow D_{\mathcal{L}(f)} = \underbrace{\mathrm{Re}(s)}_{\sigma} > x_0$$

b) $5Y(s) + sY(s) - 0 + \dfrac{6Y(s)}{s} = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$

$$= \int_0^1 t \cdot e^{-st}\, dt = t\frac{e^{-st}}{s} - \left.\frac{e^{-st}}{s^2}\right|_0^1 = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2}$$

$u = t \rightarrow du = dt$

$dv = e^{-st}\,dt \rightarrow v = \dfrac{e^{-st}}{s}$

$$\int t e^{-st}\, dt = \frac{t e^{-st}}{s} - \int \frac{e^{-st}}{s}\, dt = \frac{t e^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s}{s+5}\left(\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2}\right)$$

$$= e^{-s}\left(\frac{1}{(s+5)} - \underbrace{\frac{1}{s(s+5)}}\right) + \frac{1}{s^2(s+5)}$$

$f(s)$

$$\frac{-1}{s^2+5s+5/2-5/2}$$

estrategia 1

$$= \frac{-1}{(s+5/2)^2 - 5/2)}$$

completar cuadrados

$$f(s) = f(0) + f'(0)s + \frac{f''(0)}{2!}s^2 + \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{f(s)}{s^2} = \frac{f(0)}{s^2} + \frac{f'(0)}{s} + \frac{f''(0)}{2}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s^2} - \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{125}$$

$$f'(s) = \frac{-(s+5)'}{(s+5)^2} = \frac{-1}{(s+5)^2} \Rightarrow f''(s) = \frac{2}{(s+5)^3}$$

Lo mejor es hacer fracciones simples:

$$\frac{-1}{s\cdot(s+5)} = \frac{A(s)+B(s+5)}{s(s+5)}$$

$$\Rightarrow A+B=0 \rightarrow A=1/5$$

$$-1 = 5B \rightarrow \boxed{B=-1/5}$$

$4/5$

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{s+5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{e^{-s}}{s} - \frac{1}{5}\cdot\frac{e^{-s}}{(s+5)} + \frac{1}{s^2(s+5)}$$

$$\frac{1}{s^2(s+5)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s+5} = \frac{(As+B)(s+5)+Cs^2}{s^2(s+5)}$$

$$= \frac{As^2+Bs+5As+5B+Cs^2}{s^2(s+5)}$$

$5B = 1 \rightarrow \boxed{B = 1/5}$

$A + C = 0 \longrightarrow \boxed{C = 1/25}$

$B + 5A = 0 \rightarrow 1/5 + 5A = 0$

$5A = -1/5$

$\boxed{A = -1/25}$

$$\Rightarrow \frac{1}{s^2(s+5)} = -\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s^2} + \frac{1}{25(s+5)}$$

$$\Rightarrow Y(s) = e^{-s}\left(\frac{1}{s+5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(s+5)}\right) +$$

$\frac{1}{s+5} \sqsupset e^{-5t}H(t)$, $1/s \sqsupset H(t)$, $e^{-as}F(s) \sqsupset f(t-a)H(t-a)$

$$Y(s) = e^{-s}\left(4/5\,\frac{1}{s+5} + 1/5\cdot\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{25}\cdot 1/s + 1/5\cdot 1/s^2 + 1/25\cdot\frac{1}{s+5}$$

Busco las antitransformadas.

$F(s) = \frac{1}{s-5} \quad \exists \; f(t) = e^{-5t} H(t)$

$e^{-s} F(s) = \frac{e^{-s}}{s-5} \quad \exists \; f(t-1) \cdot H(t-1)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{e^{-5(t-1)}} \cdot H(t-1)$

$\Rightarrow 4/5 \; \frac{e^{-s}}{s-5} \quad \exists \; e^{-5(t-1)} \cdot H(t-1)$

$\frac{1}{5} \frac{e^{-s}}{s} \quad \exists \; \frac{H(t-1)}{5}$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{4}{5} e^{-5(t-1)} H(t-1) + \frac{1}{5} H(t-1) + \left(-\frac{1}{25} + \frac{1}{5} t + \frac{1}{25} e^{-5t}\right) H(t)}$$

17/2/17

Ejercicio 1.

a) Definir transformación conforme y explicar qué significa que una transformación conforme preserva ángulos.

b) Plantear el problema que modeliza el potencial eléctrico u en el semicírculo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1, y > 0\}$ con condiciones de frontera $u(x,0) = 0$ para $x \in (-1,1)$ y $u(x,y) = 1$ para $x^2+y^2 = 1$ $y > 0$. Resolver el problema y describir las líneas equipotenciales y las líneas de campo.

Ejercicio 2.

a) Hallar $u(x,y)$ que verifica: $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & 0<x<\pi,\ y>0 \\ u(0,y)=u(\pi,y)=0 & y\geqslant 0 \\ u(x,0)=4\,\mathrm{sen}^3 x & 0\leqslant x\leqslant \pi \\ \lim\limits_{y\to\infty} u(x,y)=0 & 0\leqslant x\leqslant \pi \end{cases}$

y describir una situación física que se pueda modelar mediante este problema.

Ayuda: $4\,\mathrm{sen}^3 x = 3\,\mathrm{sen}\, x - \mathrm{sen}\,(3x)$

b) Argumentar que para ciertos coeficientes a_n y b_n vale:

$$x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{3}x\right) + b_n \mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi}{3}x\right) \quad \forall x \in (0,3)$$

y dar una expresión (sin calcular) de tales coeficientes, ¿son únicos? ¿Vale la igualdad en la frontera del intervalo? ¿Converge la serie uniformemente en $[0,3]$?

Ejercicio 3.

a) Comprobar que la transformada de Fourier de $f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ t^n e^{-t} & \text{si } t\geqslant 0 \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$ es $\hat{f}_n(w) = \dfrac{n!}{(1+iw)^{n+1}}$. Deducir que $\forall n \in \mathbb{N}$: $\int\limits_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = n!$

b) Hallar, si existe, una función continua $f : [0,\infty] \to \mathbb{R}$ que satisfaga la siguiente ecuación integral: $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(tx)dx = \begin{cases} 1-t & \text{si } 0\leqslant t\leqslant 1 \\ 0 & \text{si } t>1 \end{cases}$ (estudiar especialmente la continuidad en el cero)

Ejercicio 4.

a) Resolver, aplicando la transformada de Laplace, la siguiente ecuación integral:

$$y(x) = x + \int\limits_0^x \cos(x-t)\, y(t)dt \quad x \geqslant 0$$

b) Obtener la expresión de la transformada de Laplace de f'' en términos de la transformada de Laplace de f, introduciendo las hipótesis necesarias.

$$\mathcal{L}\left\{ e^{t}\cos(3t+\pi/3) \right\}$$

$$e^{t} f(t) \rightarrow F(s-1)$$

$$f(t) = \cos(3t) \xrightarrow{TL} \frac{s}{s^2+9}$$

$$f(t-a) \xrightarrow{TL} e^{-as} F(s)$$

$$g(t) = \cos(3t+\pi/3) = f(t-(-\pi/3)) \xrightarrow{TL} \frac{s \cdot e^{\pi/3 s}}{s^2+9} = G(s)$$

$$e^{t} g(t) \rightarrow G(s-1)$$

$$\Rightarrow e^{t}\cos(3t+\pi/3) \xrightarrow{TL} \frac{(s-1) \cdot e^{\pi/3(s-1)}}{(s-1)^2+9}$$

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+5)(s^2+4s+5)} = \frac{s+5-2}{s+5(s^2+4s+5)}$$

$$= \frac{1}{s^2+4s+5} - \frac{2}{(s+5)(s^2+4s+5)}$$

$$= \frac{1}{(s+2)^2+1} - \frac{2}{(s+5)(s^2+4s+5)}$$

$$\frac{-2}{(s+5)(s^2+4s+5)} = \frac{A+Bs}{s^2+4s+5} + \frac{C}{s+5} = \frac{(A+Bs)(s+5) + Cs^2+4Cs+5C}{\ldots}$$

$$= \frac{As+Bs^2+5A+5Bs+Cs^2+4Cs+5C}{\ldots}$$

Escaneado con CamScanner

$B + C = 0 \rightarrow \boxed{B = -C}$

$A + 5B + 4C = 0 \longrightarrow A + 5B - 4B = 0$

$5A + 5C = -2$

$A + B = 0$

$\boxed{A = -B} = C$

$\downarrow$

$+5C + 5C = -2$

$10C = -2 \rightarrow \boxed{C = -1/5}$

$\boxed{A = -1/5}$; $\boxed{B = 1/5}$

$$\frac{-2}{(S+5)(S^2+4S+5)} = -1/5 \circ \frac{1}{S^2+4S+5}$$

$$-1/5 \circ \frac{1}{S+5}$$

$$+1/5 \circ \frac{S}{S^2+4S+5}$$

$$= -1/5 \circ \left[\frac{1}{(S+2)^2+1} + \frac{1}{S+5}\right]$$

$$+ 1/5 \left[\frac{S}{(S+2)^2+1}\right]$$

$\downarrow$ es

$$\left[\frac{S+2-2}{(S+2)^2+1} = \frac{S+2}{(S+2)^2+1} - 2 \circ \frac{1}{(S+2)^2+1}\right]$$

$$F(S) = \left[\cancel{1} - 1/5 - \frac{2}{5}\right] \frac{1}{(S+2)^2+1} - 1/5 \circ \frac{1}{S+5} + \frac{2}{5} \circ \frac{S+2}{(S+2)^2+1}$$

$$f(t) = 2/5 \circ \operatorname{sen}(t) e^{-2t} - 1/5 \circ e^{-5t} + 2/5 \circ e^{-2t} \circ \cos(t)$$

$$2/s\, e^{-t}(\cos(t)+\operatorname{sen}(t)) - 1/s\, e^{-st} = f(t)$$

$$\cos(t)+\operatorname{sen}(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} + \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{it}+e^{-it}-i e^{it}+i e^{-it}\right]$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}\left[e^{it}(1-i) - e^{-it}(-1-i)\right]}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{it}+e^{it}e^{i\pi/2} - e^{-it}(-1+e^{-i\pi/2})\right] \cancel{= \frac{1}{2}\left[e^{it}+e^{-it}-e^{i\pi/2}e^{it}+e^{i\pi/2}e^{-it}\right]}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{it}(1+e^{i\pi/2}) - e^{-it}(-1+e^{i\pi/2})\right] \cancel{= \frac{1}{2}\left[e^{it}+e^{i\pi/2}\right.}$$

$$\frac{s^2+1}{s^2(s+2)} = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s^2(s+2)}$$

$$= \frac{1}{s+2} + \left[\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+2}\right]$$

$$\frac{1}{s^2(s+2)} = \frac{A+Bs}{s^2} + \frac{C}{s+2} = \frac{(A+Bs)(s+2)+Cs^2}{s^2(s+2)}$$

$$= \frac{As+Bs^2+2A+2Bs+Cs^2}{s^2(s+2)}$$

$$\begin{cases} B+C=0 \longrightarrow B=-C \rightarrow \boxed{C=1/4} \\ A+2B=0 \rightarrow 2B=-A \rightarrow B=-A/2=-1/4 \\ 2A=1 \rightarrow \boxed{A=1/2} \end{cases}$$

$$\frac{s^2+1}{s^2(s+2)} = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\circ\frac{1}{s^2} - \frac{1}{4}\circ\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\circ\frac{1}{s+2}$$

$\downarrow$

$$f(t) = \frac{5}{4}e^{-2t} + 1/2\circ t - 1/4\circ 1$$

Escaneado con CamScanner

(4)

a) $y(x) = x + \overbrace{\int_0^x y(t)\cos(x-t)\,dt}^{y(x) * \cos(x)}, \quad x>0$

$\downarrow$ TL.

$Y(s) = \frac{1}{s^2} + Y(s) \cdot \frac{s}{s^2+1}$

$Y(s)\left[1 - \frac{s}{s^2+1}\right] = 1/s^2$

$Y(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{s}{s^2+1}} = \frac{1}{s^2 - \frac{s^3}{s^2+1}}$

$Y(s) = \frac{1}{\frac{s^2(s^2+1)-s^3}{s^2+1}} = \left(\frac{s^2(s^2+1)-s^3}{s^2+1}\right)^{-1}$

$= \frac{s^2+1}{(s^2+1)s^2 - s^3} = \frac{1}{s^2(s^2+1)-s^3}$

$+ \frac{s^2}{(s^2+1)s^2-s^3} = \frac{1}{s^4+s^2-s^3} + \frac{s^2}{s^2[(s^2+1)-s]}$

$= \frac{1}{s^2(s^2-s+1)} + \frac{1}{s^2-s+1}$

$= \frac{1+s^2}{(s^2-s+1)s^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C+Ds}{s^2-s+1} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C+Ds}{s^2-s+1}$

$= \frac{(As+B)(s^2-s+1)+(C+Ds)s^2}{s^2(s^2-s+1)}$

$$\frac{As^3 - As^2 + As + Bs^2 - Bs + B + Cs^2 + Ds^3}{s^2(s^2 - s + 1)}$$

$$A + D = 0 \longrightarrow \boxed{D = -1}$$
$$-A + B + C = 1 \longrightarrow \boxed{C = 1}$$
$$A - B = 0 \longrightarrow \boxed{A = B = 1}$$
$$B = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1 + s^2}{s^2(s^2 - s + 1)} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{1 - s}{s^2 - s + 1}$$

$$= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{1 - s}{s^2 - s + 1/4 + 3/4}$$

$$= \frac{1 - s}{(s - 1/2)^2 + 3/4} = \frac{-(s - 1)}{(s - 1/2)^2 + 3/4}$$

$$= \frac{-(s - 1/2 - 1/2)}{(s - 1/2)^2 + 3/4} = \frac{-(s - 1/2)}{(s - 1/2)^2 + 3/4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s - 1/2)^2 + 3/4}\right)$$

$$\Rightarrow Y(s) = -1 \cdot \frac{(s - 1/2)}{(s - 1/2)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{(s - 1/2)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$\underset{x \geq 0}{\cos(kx)} \xrightarrow{TL} \frac{s}{s^2 + k^2} \qquad \underset{x \geq 0}{\text{sen}(kx)} \xrightarrow{TL} \frac{k}{s^2 + k^2}$$

$$e^{ax} f(x) \xrightarrow{TL} F(s - a)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = -e^{1/2x} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{1/2x} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$$

b) $$\mathcal{L}(f'') = \int_0^{+\infty} f''(t)\, e^{-st}\, dt \overset{f' \text{ continua}}{=} f'(t)\, e^{-st}\Big|_0^{+\infty} - s\int_0^{+\infty} f'(t)\, e^{-st} = \circledast$$

$$u = e^{-st} \rightarrow du = -s e^{-st}$$

$$dv = f''(t)\,dt \rightarrow v = f'(t)$$

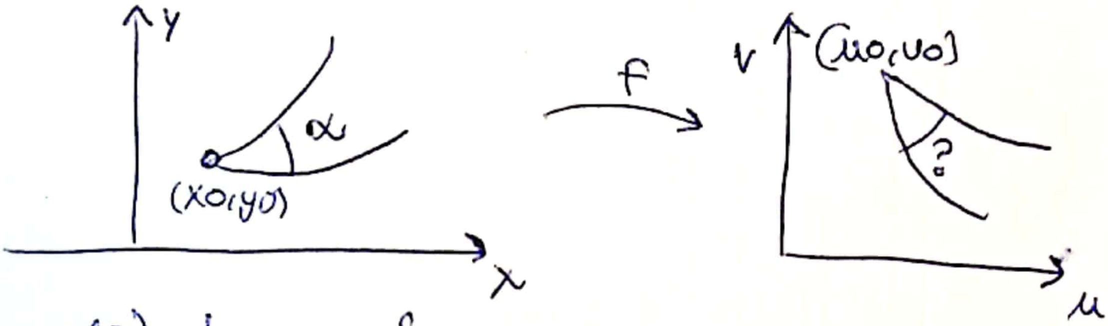
$$\int_0^{+\infty} f'(t)\, e^{-st}\, dt \overset{f \text{ continua}}{=} f(t)\, e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= f(t)\, e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s\,\mathcal{F}(s)$$

$\circledast$
$$= \lim_{t\to+\infty} f'(t)\, e^{-st} - \lim_{t\to 0} f'(t)\, e^{-st}$$
$$+ s\left[\lim_{t\to+\infty} f(t)\, e^{-st} - \lim_{t\to 0} f(t)\, e^{-st} + s\,\mathcal{F}(s)\right]$$

$$= \underbrace{\lim_{t\to+\infty} f'(t)\, e^{-st}}_{0 \text{ si } f'(t) \text{ es de orden exp}} - f'(0) - s\underbrace{\lim_{t\to+\infty} f(t)\, e^{-st}}_{0 \text{ si } f \text{ es de orden exp}} - s f(0) + s^2\mathcal{F}(s)$$

① a) Sean C_1, C_2 dos curvas en $\mathbb{C}$, sea (x_0,y_0) la intersección de ambas y sea α el ángulo que se forma debido a esa intersección:



Sea $f(z)$ / $C_1 \xrightarrow{f} C_1'$ donde C_1', C_2' se intersecan en (u_0,v_0)

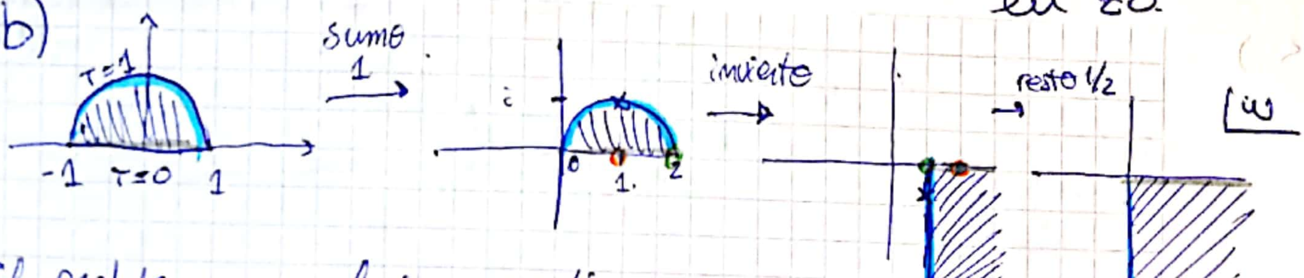
$C_2 \xrightarrow{f} C_2'$

$(x_0,y_0) \xrightarrow{f} (u_0,v_0)$

Si ocurre que el ángulo que se forma en esa intersección es α, la transformación se denomina conforme.

Si $f(z)$ es holom en z_0 y $f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow f$ es conforme en z_0

b)



El problema en el plano w tiene solución que cumple $A\theta+B$,$^{(1)}$ una func armónica, cuya arm. conj es $A\ln r + B$.$^{(2)}$

El potencial eléctrico será: $p(z) = \varphi(x,y) + i\,\psi(x,y)$ donde $= A \ln|T(z)| + B$

$\psi(x,y)$ corresp a la func(2) expresada en variables x e y, y análogo con (1) y $\varphi(x,y)$. $T(z) = \frac{1}{z+1} - 1/2 = \frac{\bar{z}+1}{|z+1|^2} - 1/2 = \frac{x-iy+1}{(x+1)^2+y^2} - 1/2$

$= \frac{x-iy+1-1/2(x+1)^2-1/2y^2}{(x+1)^2+y^2} = \frac{\cancel{x}-iy+1-x^2/2-\cancel{x}-1/2-1/2y^2}{(x+1)^2+y^2}$

$$\frac{1/2\,(1-(x^2+y^2))}{(x+1)^2+y^2} - \frac{i\,y}{(x+1)^2+y^2}$$

Planteo que:

$$\left\{\begin{array}{l} A\cdot 0 + B = 0 \\ A\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) + B = 0 \end{array}\right. \text{ en } LW \Bigg\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} B=0 \\ A=-\frac{2}{\pi}\end{array}}$$

Con lo cual:

$$\psi(x,y) = -\frac{2}{\pi}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{-2y}{1-(x^2+y^2)}\right)$$ líneas de campo

va al revés por cuest. físicas

y $\varphi(x,y) = -\frac{2}{\pi}\,\ln(|T(z)|)$ líneas equipotenciales.

$$|T(z)| = \frac{\sqrt{[1/2\,(1-(x^2+y^2))]^2+y^2}}{(x+1)^2+y^2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}\,(1-2(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2)+y^2}}{(x+1)^2+y^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1/4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + (x^2+y^2)^2 + y^2}}{(x+1)^2+y^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1/4 - 1/2\,x^2 + y^2/2 + (x^2+y^2)^2}}{(x+1)^2+y^2}$$

Para ver qué forma tiene $\varphi(x,y) = cte$ conviene llevar a $T(z)$ a la forma de una func homográfica: $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

$$T(z) = \frac{1}{z+1} - 1/2 = \frac{1 - z/2 - 1/2}{z+1} = \frac{1/2 - z/2}{z+1} = \frac{z\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{z+1}$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = K = -\frac{2}{\pi}\ln\left|\frac{\frac{1}{2}(-z+1)}{z+1}\right| \Rightarrow \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = C$$

$$\rightarrow |z-1|^2 = c^2|z+1|^2$$

$$(x-1)^2+y^2 = c^2(x+1)^2+c^2y^2$$

$$x^2-2x+1+y^2 = c^2x^2+c^2x\cdot 2+c^2+c^2y^2$$

$$(1-c^2)x^2+2x(1+c^2)+(1-c^2)+(1-c^2)y^2=0$$

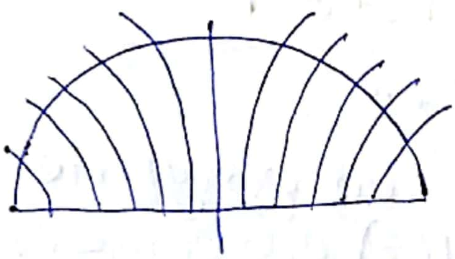
$$(1-c^2)(x^2+1+y^2)+2x(1+c^2)=0$$

$$x^2+1+y^2+2x\left(\frac{1+c^2}{1-c^2}\right)=0 \quad c^2\neq 1$$

$$\left(x+\frac{1+c^2}{1-c^2}\right)^2-\frac{1+c^2}{1-c^2}+1+y^2=0$$

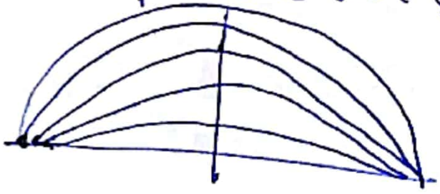
$$\left(x+\frac{1+c^2}{1-c^2}\right)^2+y^2=\frac{1+c^2}{1-c^2}-1=\frac{1+c^2-1+c^2}{1-c^2}$$

$$\left(x+\frac{1+c^2}{1-c^2}\right)^2+y^2=\frac{2c^2}{1-c^2}$$



Líneas de campo

Análogamente si $\psi(x,y)=\text{cte}$ se puede ver que

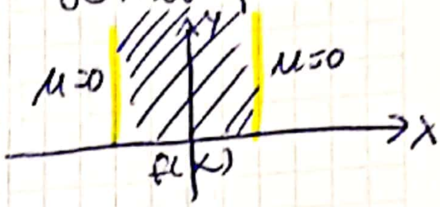


$\lim_{y\to+\infty} u(x,y)=0$

(2) $\begin{cases} \nabla^2 u=0, & 0<x<\pi,\ y>0 \\ u(0,y)=u(\pi,y)=0, & y\geq 0 \end{cases}$ | $u(x,0)=4\,\text{sen}^3(x)$ $0\leq x\leq\pi$

Propongo $u(x,y)=X(x)\,Y(y)$

pared semiinfinita



$\Rightarrow u_{xx}(x,y)=X''(x)\,Y(y)$

$u_{yy}(x,y)=Y''(y)\,X(x)$

$\Rightarrow \nabla^2 u=0=X''(x)\,Y(y)+Y''(y)\,X(x)=0$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{-Y''(y)}{Y(y)}=\lambda\ (\text{cte})$$

Con lo cual:

(1) $X''(x)+\lambda X(x)=0$ $\longrightarrow$ $\boxed{\text{tiene solución no trivial si } \lambda<0}$

(2) $Y''(y)-\lambda Y(y)=0$

(1) Si $\lambda=0 \Rightarrow X(x)=ax+b$

con $X(0)=0=X(\pi)$ la sc queda

$\boxed{a=b=0} \Rightarrow \boxed{\lambda \text{ no es } 0}$

Si $\lambda<0 \Rightarrow X(x)=a\,\text{sh}(\sqrt{\lambda}x)+b\,\text{ch}(\sqrt{\lambda}x)$

con $X(0)=X(\pi)=0$

$\Rightarrow a=b=0 \Rightarrow \boxed{\lambda \text{ no es } <0}$

Si $\lambda>0 \Rightarrow X(x)=a\,\text{sen}(\omega x)+b\cos(\omega x)$

$\downarrow$

$\lambda=\omega^2$

$\Rightarrow X(0)=b\cos(\omega\cdot 0)=b=0$

$X(\pi)=a\,\text{sen}(\omega\pi)=0$

$a\neq 0$ para que no sea sc trivial

$\Rightarrow \boxed{\omega=n\in\mathbb{N}}$

$\Rightarrow \boxed{X_n(x)=a\,\text{sen}(nx)}$

(2) como $\lambda = m^2$

$$Y''(y) - m^2 Y(y) = 0$$

$$\Rightarrow Y(y) = c\, sh(my) + d\, ch(my)$$

$$Y_m(y) = C e^{-my} + D e^{+my}$$

como $\lim_{y \to \infty} u(x,y) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{y \to \infty} X_m(x) \cdot \left(C e^{-my} + D e^{my}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{D = 0} \Rightarrow Y_m(y) = C e^{-my}$$

$C \in \mathbb{R}$

Con lo cual $u_m(x,y) = B_m e^{-my} \operatorname{sen}(mx)$

$$\Rightarrow u(x,y) = \sum_{m=0}^{+\infty} B_m e^{-my} \operatorname{sen}(mx)$$

$$u(x,0) = 4 \operatorname{sen}^3 x = 3 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(3x)$$

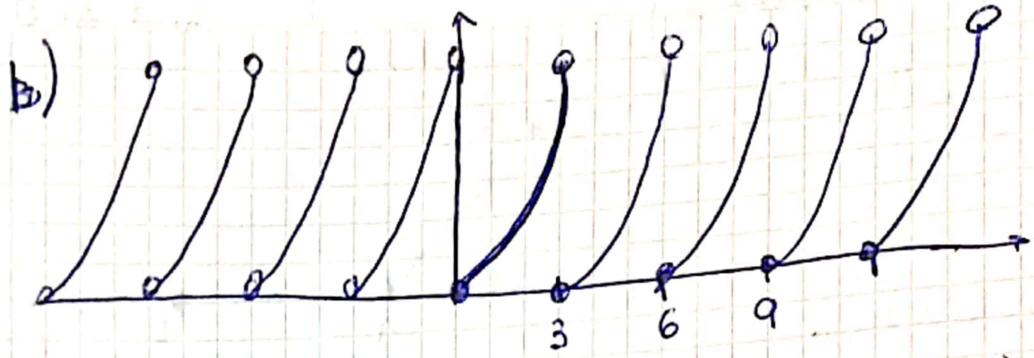
$$= \sum_{m=0}^{+\infty} B_m \operatorname{sen}(mx).$$

$\Rightarrow B_1 = 3$, $B_3 = -1$ y todos los otros B_m son 0.

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = 3 \operatorname{sen} x\, e^{-y} - \operatorname{sen}(3x) e^{-3y}}$$

Escaneado con CamScanner

b)



$$x^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{3} x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n 2\pi}{3} x\right) \quad \forall x \in (0,3)$$

Se puede ver que el periodo es 3.

$\Rightarrow f(x) = f(x+3)$ ∴ necesito una ext periódica impar.

$$a_n = \frac{1}{3}\int_0^3 x^2 \cos\left(\frac{2}{3} n\pi x\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{3}\int_0^3 x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3} n\pi x\right) dx$$

Converge al prom de límites laterales en su frontera.

Los coeficientes son los " de F, son únicos.

No conv. unif. en $[0,3]$ ya que no es continua en dicho intervalo.

③ a) $\mathcal{F}(f_n(t))(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} e^{-j\omega t} dt = \frac{n!}{(1+j\omega)^{n+1}}$ (*).

Caux:

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} e^{-st} dt = \mathcal{L}(t^n e^{-t}) \overset{n \in \mathbb{N}}{=} \frac{n!}{(s+1)^{n+1}} \longrightarrow \text{si } s = j\omega$$

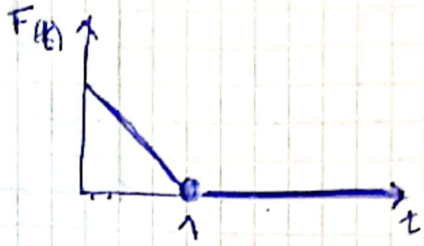
es de orden exponencial

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

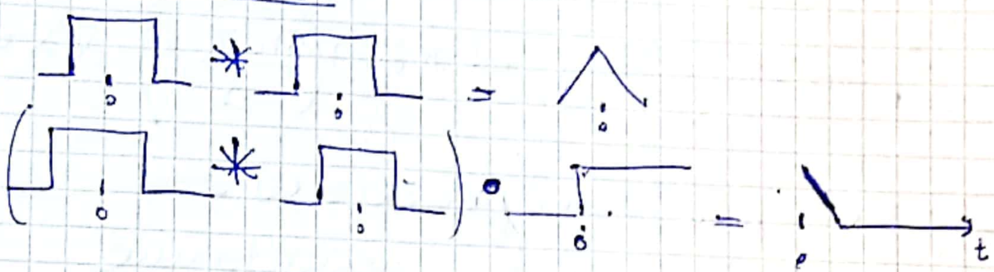
Si (*) y $\omega = 0$: $\mathcal{F}(f_n(t))(0) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \frac{n!}{1^{n+1}} \overset{n \in \mathbb{N}}{=} n!$

b) $$1 = \int_0^{+\infty} f(x)\,\text{sen}(tx)\,dx = \begin{cases} 1-t & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$ es/no es cont en 0.

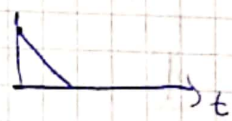
$$\underset{\mathcal{F}_S(f)}{\overset{\shortparallel}{}}$$



luego:



$$\text{Sen}(tx) = \frac{e^{jtx} - e^{-jtx}}{2j}$$

$$1) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)\,e^{jtx}}{2j}\,dx - \int_0^{+\infty} \frac{f(x)\,e^{-jtx}}{2j} =$$ 

Ok, resuelto:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathcal{F}_S(f)\,\text{sen}(tx)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{1} (1-t)\,\text{sen}(tx)\,dt, \quad \boxed{t>0}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \text{sen}(tx)\,dt - \frac{2}{\pi}\int_0^1 t\,\text{sen}(tx)\,dt$$

$u = t \to du = dt$
$dv = \text{sen}(tx)\,dt$
$v = -\frac{\cos(tx)}{x}$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left.\frac{-\cos(tx)}{x}\right|_0^1 - \left[\left.\frac{-t\cos(tx)}{x}\right|_0^1 - \int_0^1 \left[\frac{-\cos(tx)}{x}\,dt\right]\right]\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(x)+1}{x} + \frac{\cos(x)}{x} - \int_0^1 \frac{\cos(tx)}{x}\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cancel{-\cos(x)} + \cancel{\cos(x)} + 1}{x} - \left.\frac{\text{sen}(tx)}{x^2}\right|_0^1\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{x} - \frac{\text{sen}(x)}{x^2}\right]$$

Estudio continuidad en $x=0$

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2} \right] \frac{2}{\pi} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x^2} \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$\underset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{\cancel{2}x} \cdot \frac{\cancel{2}}{\pi} \underset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1} \cdot \frac{1}{\pi} = 0$$

Si propongo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \operatorname{sen}(x)}{x^2} & , x > 0 \\ 0 & \text{eoc} \end{cases} \Rightarrow f(0) = 0 = \lim_{x \to 0} f(x)$$

con lo cual es continua en $x=0$.

Escaneado con CamScanner

Ejercicio 1.

(a) Argumentar si es cierta o no, la siguiente identidad:

$$z^{1/2} + z^{1/2} = 2z^{1/2} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(b) Obtener la transformada de Fourier de $f(x) = \dfrac{x}{x^4+1}$.

Ejercicio 2.

(a) Desarrollar $f(z) = \dfrac{z}{2-z}$ en potencias de z en un entorno del origen y determinar el radio de convergencia. Analizar convergencia puntual y uniforme de las series de Fourier de $U(\theta) = u(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y de $V(\theta) = v(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ donde $u = \operatorname{Re}(f)$, $v = \operatorname{Im}(f)$

(b) Resolver:

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = 0 & -\pi < x < \pi,\ t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{2\operatorname{sen} x}{5 - 4\cos x} & -\pi \leqslant x \leqslant \pi \\ u_t(x,0) = 0 & -\pi \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

$\left.\begin{matrix} \cancel{u(-\pi,t) = c} \\ \cancel{u(\pi,t) = c} \end{matrix}\right\}$ van

Ejercicio 3.

(a) Hallar, si existe, una función $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\int_0^{+\infty} f(t)\operatorname{sen}(\omega t)\,dt = \frac{1 - \cos\omega}{\omega} \qquad \omega \neq 0$$

b) Resolver:

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx} & 0 < x < +\infty,\quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \geqslant 0 \\ u(0,t) = 0 & t \geqslant 0 \end{cases}$$

siendo f la función presentada en el ítem (a).

Ejercicio 4.

(a) Probar que si f es continua a trozos y de orden exponencial y $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ entonces $\displaystyle\lim_{\operatorname{Re}(s)\to+\infty} F(s) = 0$.

(b) Hallar, mediante transformada de Laplace, una función $y : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, de orden exponencial, que satisfaga la siguiente ecuación diferencial:

$$y''(t) + t\,y'(t) - y(t) = 0$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. ¿Es única?

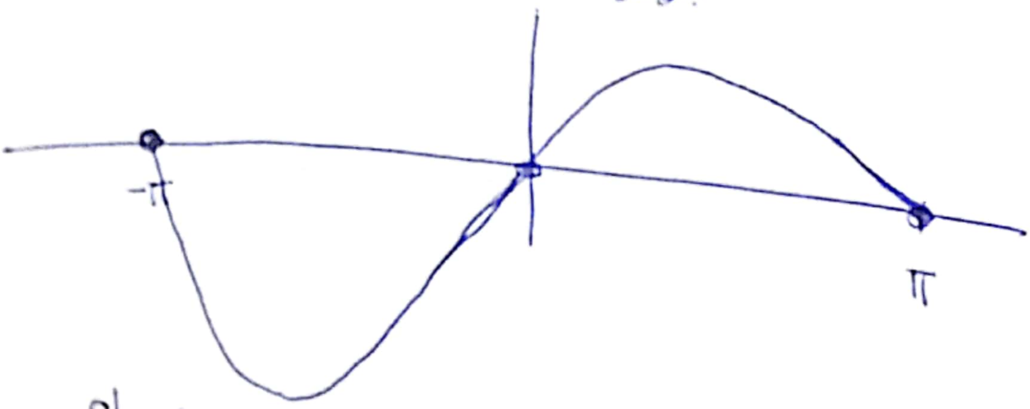
Si el DSF exponencial en $[-\pi, \pi]$ de $(x-\pi)\,\text{sen}(x+\pi)$ es $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{inx}$ argumentar la convergencia de $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n$ y $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 \alpha_n^2$. Calcular el valor de c/u. También $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2$

$a_n = 2\,\text{Re}(c_n)$, $b_n = -2\,\text{Im}(c_n)$ → no es necesario.

Si f es spp en $(a,b) \Rightarrow SF(C) \xrightarrow{a} f(x)\ \forall x \in (a,b)$ si f es cont

↳ a prom de los límites laterales en ese punto si no es cont.

- f es una función continua ~~formada por func continuas~~ ~~ya que esta~~



$f'(x) = \text{sen}(x+\pi) + (x-\pi)\cos(x+\pi)$

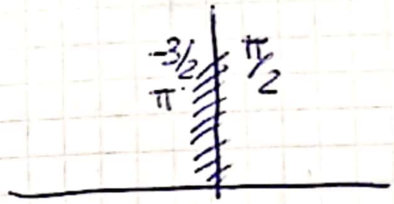
↳ voy a hacerlo bien

① a) La identidad es cierta para cada uniformización, ejemplos:

- $(-1)^{1/2} = -i$

$\downarrow$

$$|-1|^{1/2} e^{\frac{i \arg(-1)}{2}} = -i = e^{-i\pi/2}$$



$$\Rightarrow \arg(-1) = -\pi$$

Tomo $-\frac{3}{2}\pi < \arg z < \pi/2$

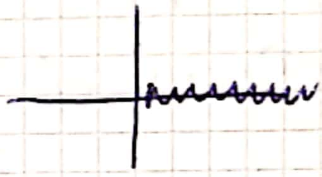
$$(-1)^{1/2} + (-1)^{1/2} = -i - i = -2i$$

- $(-1)^{1/2} = i$

$$|-1|^{1/2} e^{\frac{i \arg(-1)}{2}} = i = e^{i\pi/2}$$

tomo $0 < \arg z < 2\pi$

$$\Rightarrow \arg(-1) = \pi$$



$$(-1)^{1/2} + (-1)^{1/2} = i + i = 2i$$

Si no se define un corte de rama, la multiforme puede no verificar lo pedido.

$$\sqrt{a} \in \{b, c\}$$

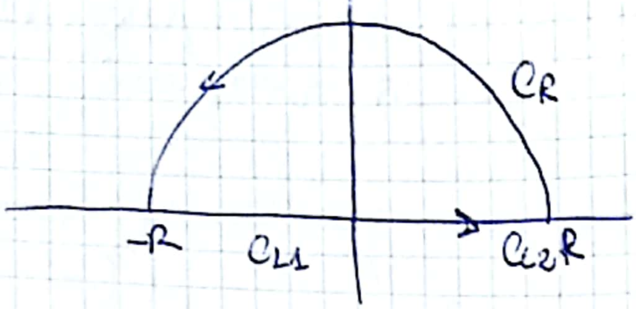
$$\Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{a} \in \{2b, b+c, 2c\}$$

b) $$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^4+1} e^{-i\omega x}\, dx$$

Si propongo:

$$f(z) = \frac{z}{z^4+1} e^{-i\omega z}$$

y tomo esta curva en el plano $\mathbb{C}$:



Podré calcular la integral pedida.
$\gamma = C_R \cup C_{L1} \cup C_{L2}$

Sé que por el Teorema de los Residuos:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{K} \operatorname{Res}(f, z_j)$$

si γ es ⊕ orientada y f es holom en γ y $RI(\gamma)$ salvo en $z_1, \dots, z_K$ sing aisladas finitas en $RI(\gamma)$

Veo que se cumpla, busco las sing de f.

Busco z / $z^4 + 1 = 0$

$z^4 = -1$.

$|z|^4 e^{i4\theta} = |1| e^{i\pi + 2k\pi}$ elijo $0 < \arg(z) < 2\pi$

$4\theta = \pi + 2k\pi$

$k = 0, 1, 2, 3$

$\Rightarrow z_1 = e^{i\pi/4}, \; z_2 = e^{i\,3/4\pi}, \; z_3 = e^{i\,5/4\pi}$

$z_4 = e^{i\,7/4\pi}$

veo que z_1 sea polo sple.

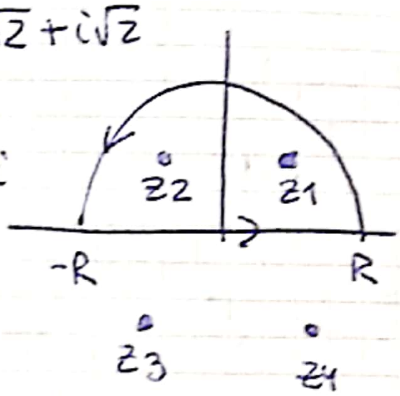
$$\operatorname{Res}(f, \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2) = \lim_{z \to z_1} (z - (\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2)) \frac{z e^{-i\omega z}}{z^4 + 1}$$

$$= \lim_{z \to z_1} \frac{z e^{-i\omega z}}{(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)} =$$

$$z_1 - z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right] = \sqrt{2}$$

$$z_1 - z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right] = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_1 - z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right] = \sqrt{2}i$$



$$\longrightarrow = \frac{(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2)\,e^{iw(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2)}}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})\sqrt{2}i}$$

$$= \frac{e^{-iw(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2)}}{4i} = \frac{e^{\sqrt{2}/2w - iw\sqrt{2}/2}}{4i}$$

$$= \frac{e^{\sqrt{2}/2w}(\cos(-w\sqrt{2}/2) + i\,\mathrm{sen}(-w\sqrt{2}/2))(-i)}{4}$$

$$= \frac{e^{\sqrt{2}/2w}}{4}(\cos(w\sqrt{2}/2) - i\,\mathrm{sen}(w\sqrt{2}/2))(-i)$$

$$= \frac{e^{\sqrt{2}/2w}}{4}(-\mathrm{sen}(w\sqrt{2}/2) - i\cos(w\sqrt{2}/2))$$

como dio finito $\neq 0$ y z_1 era sing. aislada $\Rightarrow$ z_1 es polo simple

Análogamente:

$$\lim_{z \to z_2} (z - z_2)\frac{z e^{-iwz}}{z^4 + 1} = \lim_{z \to z_2} \frac{z e^{-iwz}}{(z - z_1)(z - z_3)(z - z_4)} =$$

$$z_1 - z_2 = -(z_2 - z_1) = -\sqrt{2}$$

$$z_2 - z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \sqrt{2}i$$

$$z_2 - z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$= \frac{\cancel{\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]} e^{-i\omega(-\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2)}}{(-\sqrt{2})\cancel{\left(\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)}(\sqrt{2}i)}$$

$$= \frac{e^{-i\omega(-\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2)}}{-4i} = \frac{i e^{i\omega\sqrt{2}/2+\sqrt{2}/2\,\omega}}{4}$$

$$= \frac{i}{4} e^{\sqrt{2}/2\,\omega}\left(\cos(\omega\sqrt{2}/2)+i\,\mathrm{sen}(\omega\sqrt{2}/2)\right)$$

$$= \frac{e^{\sqrt{2}/2\,\omega}}{4}\left[-\mathrm{sen}(\omega\sqrt{2}/2)+i\cos(\omega\sqrt{2}/2)\right]$$

tmb es polo spie.

$$2\pi i \sum \mathrm{Res}(f, R_S(\gamma)) = \frac{e^{\sqrt{2}/2\,\omega}}{4}\left(-2\,\mathrm{sen}(\omega\sqrt{2}/2)\right) 2\pi i$$

$$= -e^{\sqrt{2}/2\,\omega}\, i\pi\, \mathrm{sen}(\omega * \sqrt{2}/2)$$

Sé que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{C_{L1}} f(z)\,dz + \int_{C_{L2}} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz$$

~~Si $z = Re^{i\theta}$ en C_R.~~

$$\cancel{\int_{C_R} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} \frac{Re^{i\theta} e^{-i\omega e^{i\theta}R}}{(R^4 e^{i4\theta}+1)} e^{i\theta}\, d\theta}$$

~~ok ya~~

Para la integral C_R:

$$\left|\int_{C_R} \frac{z e^{-iwz}}{z^4+1}\,dz\right| \leq \int_{C_R} \frac{|z|\,|e^{-iwz}|}{|z^4+1|}$$

$$\underset{\text{Si } \boxed{w<0}}{\leq} \int_{C_R} \frac{R}{1-R^4}\,dz = \frac{R}{1-R^4}\cdot \pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

en C_{L_2}: $\displaystyle\int_0^R \frac{x e^{-iwx}}{x^4+1}\,dx$ en C_{L_1} $\displaystyle\int_{-R}^0 \frac{x e^{-iwx}}{x^4+1}\,dx$.

y C_R: $\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz \underset{R\to\infty}{=} 0$ De igual forma sin realizar esto: $w<0$

$$\Rightarrow \int_0^R \frac{x e^{-iwx}}{x^4+1}\,dx + \int_{-R}^0 \frac{x e^{-iwx}}{x^4+1} \underset{\text{si } \boxed{w<0}}{=} -e^{\sqrt{2}/2\, w}\, i\pi\, \mathrm{sen}\left(\frac{w\sqrt{2}}{2}\right)$$

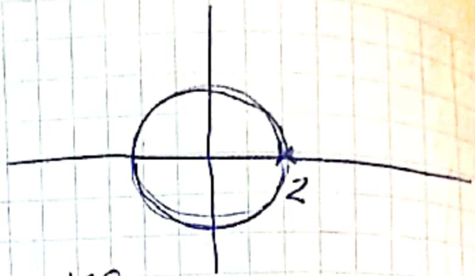
Si tomo $\lim_{R\to+\infty}$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{-iwx}}{x^4+1}\,dx = -e^{\sqrt{2}/2\, w}\, i\pi\, \mathrm{sen}\left(\frac{w\sqrt{2}}{2}\right)$ para $w<0$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{-iwx}}{x^4+1}\,dx = -e^{-\sqrt{2}/2\,|w|}\, i\pi\, \mathrm{sen}\left(\frac{w\sqrt{2}}{2}\right)$$

ya que como f es impar $\Rightarrow \hat{f}$ es impar

y como es impar real $\Rightarrow \hat{f}$ es imag pura

② a)



$$f(z) = \frac{z}{2-z}$$

$$= \frac{z}{2(1-z/2)} = \frac{z}{2}\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^m$$

$$\left|\frac{z}{2}\right| < 1 \qquad = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{m+1} \quad |z|<2$$

$$|z| < 2 \qquad = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{k}$$

Si $z = e^{i\theta}$

$$\frac{e^{i\theta}}{2-e^{i\theta}} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{ik\theta}}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(k\theta)+i\,\mathrm{sen}(k\theta)}{2^k}$$

$$\frac{e^{i\theta}(2-e^{-i\theta})}{(2-e^{i\theta})(2-e^{-i\theta})} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(k\theta)}{2^k} + i\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{sen}(k\theta)$$

$$\frac{2e^{i\theta}-1}{4-2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+1} = \frac{2\cos(\theta)+i\,2\,\mathrm{sen}\,\theta-1}{5-4\cos(\theta)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(k\theta)}{2^k} = \frac{2\cos(\theta)-1}{5-4\cos\theta} \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{sen}(k\theta)}{2^k} = \frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta}{5-4\cos\theta} \qquad (2)$$

Falta justificar convergencia.

Para $\theta = 0$ (1) $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2-1}{8-4} = 1$ $\overset{\text{serie geom.}}{=} \frac{1/2}{1-1/2} = 1$ ✓

Para $\theta = \pi/2$ $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ = análogo pero con el seno.

Para $\theta = \pi$ $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$

Para $\theta = -\pi$ $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)\left(\frac{-1}{2}\right)^k$

La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{2^k}$ converge absolutamente pa que se cumple el Crit M de W:

Sea $f_n : D \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ / $|f_n(x)| \leq M_n$ $\forall x \in D$ y $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$ conv $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ $\underset{\text{en } D}{CU}$ y $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ CA en D.

$f_n(x) = \frac{\cos(k\theta)}{2^k}$, $|f_n(x)| = \frac{|\cos(k\theta)|}{2^k} \leq \underbrace{\frac{1}{2^k}}_{M_n}$ $\forall \theta \in$ $D = \{[-\pi, \pi]\}$

y como $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ (C) dado que es una serie geom $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ CU en D y además converge absolutamente.

análogamente puede realizarse la misma demostr. para el seno.

Como la conv uniforme es más "fuerte" que la puntual, las series de Fourier convergen puntualmente también. CU → CP

Cuerda vibrante

b) $u_{xx} = u_{tt} \cdot 1^{K}$ → ecuación de onda $-\pi < x < \pi,\ t > 0$

$u(-\pi, t) = 0$

$u(\pi, t) = 0$

→ extremos fijos

$u(x,0) = \dfrac{2 \operatorname{sen} x}{5 - 4\cos x}$ $-\pi \leq x \leq \pi$ → posición inicial de la cuerda

$u_t(x,0) = 0$ $-\pi \leq x \leq \pi$

→ velocidad inicial

1) Hay que hacer variables separables

2) $X(x) = a \operatorname{sen}\left(\dfrac{m\pi}{L} x\right)$, $T(t) = b \cos\left(\dfrac{m\pi \cdot \sqrt{K}}{L} t\right)$ acá es 1.

$L = 2\pi$

queda

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m x}{2}\right) \cos\left(\frac{m t}{2}\right)\Bigg|_{t=0} = \frac{2 \operatorname{sen}(x)}{5 - 4\cos(x)}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{m x}{2}\right) \cdot b_m = \frac{2 \operatorname{sen}(x)}{5 - 4\cos(x)}$$

$$= \sum_{K=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(Kx)}{2^K}$$

$\operatorname{sen}(x/2) \cdot b_1 + \operatorname{sen}(x) \cdot b_2 + \dots$

$$= \frac{\operatorname{sen}(x)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2^2} + \dots$$

$$\Rightarrow b_m = \frac{\operatorname{sen}(Kx)}{2^K \cdot \operatorname{sen}(n x/2)}$$

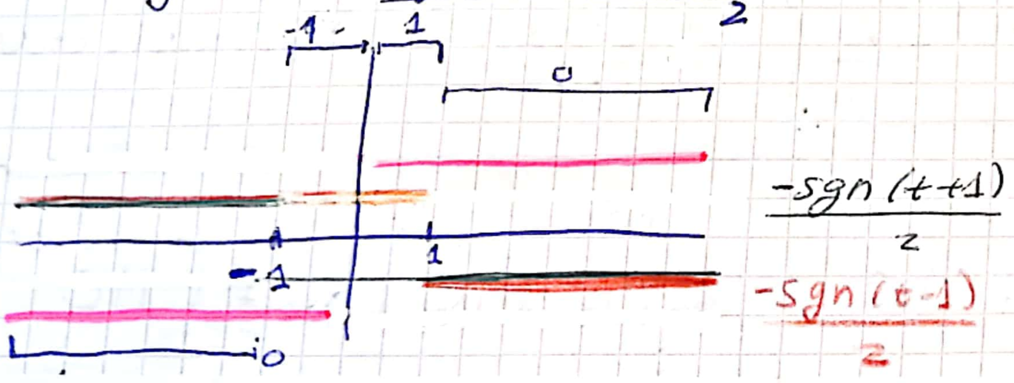
③ $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R} \,/\, \underbrace{\int_0^{+\infty} f(t)\,\text{sen}(\omega t)\,dt}_{F_S(f)} = \frac{1-\cos\omega}{\omega} \,/\, \omega \neq 0$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(\omega)}{\omega}\,\text{sen}(\omega t)\,d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega}\,d\omega - \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega)\,\text{sen}(\omega t)}{2\omega}\,d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\,\text{signo}(t) - \frac{2}{\pi}\int_0 \frac{\text{sen}(\omega t+\omega) + \text{sen}(\omega t-\omega)}{\omega}\,d\omega$$

$$= \text{signo}(t) - \frac{\text{signo}(t+1) - \text{signo}(t-1)}{2} \quad ; \; t > 0$$



si $-\infty < t < +\infty$

pero como $t > 0$:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1) \\ 1/2 & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

b) $u_t = k u_{xx}$ $\quad 0 < x < +\infty \;, t > 0 \quad (1)$ Calor en varilla semi∞

$u(x,0) = f(x) = f$ (m c a) $\quad x \geq 0 \quad (2)$

$u(0,t) = 0 \quad \forall\, t \geq 0 \quad (3)$

Aplico TS a cada lado de cada igualdad:

$$\hat{u}_t(\omega,t) = -\omega^2 \hat{u}(\omega,t) K \quad (1*)$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\omega,t) = A(\omega)\, e^{-\omega^2 t K}$$

Si $t = 0$:

$$\hat{u}(\omega,0) = A(\omega) = \frac{1-\cos(\omega)}{\omega}.$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\omega,t) = \frac{1-\cos(\omega)}{\omega}.$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{u(\omega,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(\omega)}{\omega}\, e^{-\omega^2 t K} \operatorname{sen}(\omega x)\, d\omega}$$

4

a) $\left| \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|\, |e^{-st}|\, dt \underset{\text{orden exp.}}{\leq} \int_0^{+\infty} M e^{x_0 t}\, e^{-Re(s) t}\, dt$

$$= M \int_0^{+\infty} e^{-(Re(s)-x_0)t}\, dt = M \left. \frac{e^{-(Re(s)-x_0)t}}{-(Re(s)-x_0)} \right|_0^{+\infty} = \frac{M}{Re(s)-x_0} \xrightarrow[Re(s)\to+\infty]{} 0$$

$Re(s) > x_0$

$t f(t) \xrightarrow{L} -F'(s)$

$f'(t) \xrightarrow{L} sF(s) - f(0)$

ⓑ $\underbrace{y''(t)}_{L} + \underbrace{t y'(t)} - y(t) = 0$

$s^2 Y(s) - \cancel{s y(0)}_{0} - y'(0) - [Y(s) + s Y'(s)] - Y(s) = 0$

$(s^2-2) Y(s) - s Y'(s) - 1 = 0$

$Y'(s) + Y(s)\left(\frac{2}{s} - s\right) = -1/s$

$Y(s) = y_{hom}(s) + y_{part}(s)$ o tmb podemos usar el factor integrante

$g(s) = e^{\int \frac{2}{s} - s \, ds} = e^{2\ln|s| - \frac{s^2}{2}} = s^2 e^{-s^2/2}$

$\Rightarrow \; s^2 e^{-s^2/2} Y'(s) + Y(s) s^2 e^{-s^2/2}\left(\frac{2}{s} - s\right) = -\frac{e^{-s^2/2}}{s} s^2$

$s^2 e^{-s^2/2} Y'(s) + Y(s) 2s e^{-s^2/2} - s^3 Y(s) e^{-s^2/2} = -e^{-s^2/2} s$

$\frac{d}{ds}\left[s^2 e^{-s^2/2} Y(s)\right] = \frac{d}{ds}\left[e^{-s^2/2}\right]$

$s^2 e^{-s^2/2} Y(s) = e^{-s^2/2} + K, \; K = cte$

$Y(s) = \frac{1}{s^2} + K \cdot \frac{e^{s^2/2}}{\underbrace{s^2}_{\text{no es de orden exp} \Rightarrow K=0}}$ elijo $\Rightarrow \boxed{y(t) = tH(t)}$ ⓑ

Demuestre que: $\cdot$ D abierto en $\mathbb{C}$ conexo

$\cdot$ $f, g \,/\, f(x_0) = g(x_0)$ para algún $x_0 \in D$.

$\cdot$ $Re(f) = Re(g)$

$\Rightarrow f = g \; \forall z \in D$

$$f = u + iv \qquad f(z_1) = u_1 + iv_1$$
$$g = u + iw \qquad g(z_1) = u_1 + iv_1$$

Si f y g son holom en D $\Rightarrow$ cumplen CCR.

$$\left.\begin{array}{l} u_x = v_y = w_y \quad (1) \\ u_y = -v_x = -w_x \quad (2) \end{array}\right\} \text{CCR (se cumplen en D)}$$

$$\Rightarrow \int v_y \, dy = \int w_y \, dy + g(x). \quad \text{de } (1)$$

$$v(x,y) = w(x,y) + g(x)$$

De (2)

$$-\int v_x \, dx = -\int w_x \, dx + h(y)$$

$$-v(x,y) = -w(x,y) + h(y)$$

$$v(x,y) = w(x,y) - h(y)$$

$$\Rightarrow v(x,y) = w(x,y) + g(x) = w(x,y) - h(y)$$

$$\Rightarrow g(x) = -h(y) = k \in \mathbb{C}$$

Si $V(x_0, y_0) = \cancel{x_0} + V_0 \cdot i = W(x_0, y_0)$

$\Rightarrow \boxed{K = 0}$

$\therefore \boxed{V(x,y) = W(x,y)}$ en $\underline{\underline{D}}$

$\Rightarrow$ Si $f = u + iv$ y $g = u + iW = u + iV$

$\Rightarrow f = g$ en D

Si f es holomorfa para $|z| > R$ con $\lim_{z \to +\infty} f(z) = 0$ y continua en $|z| = R$

$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{N} / |f(z)| \leq \dfrac{c}{|z|^M} \quad \forall |z| > R, \ c > 0$

$\lim_{z \to +\infty} f(z) = 0$

$\Updownarrow$

$\lim_{z \to 0} f(1/z) = 0$

$|z| = R$ continua

$\Leftrightarrow 1/|z| = 1/R$ "

f holom en $|z| > R$

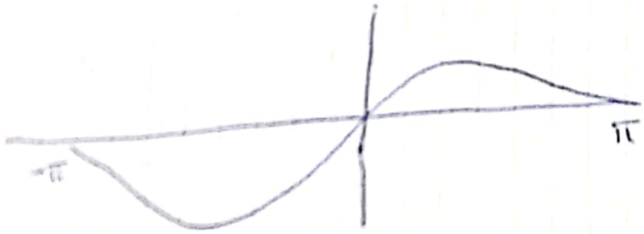
$\Downarrow$

$f(1/z)$ holom $\dfrac{1}{|z|} < \dfrac{1}{R}$

Llamo a $f(z) = g(w) \Leftrightarrow f\left(R/z\right) = f(w)$

Si el desarrollo exp de Fourier en $[-\pi,\pi]$ de $(x-\pi)\operatorname{sen}(x+\pi)$ es $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{inx}$, ¿convergen $\sum_{-\infty}^{+\infty}\alpha_n$, $\sum_{-\infty}^{+\infty}|\alpha_n|^2$ y $\sum_{-\infty}^{+\infty} n^2\alpha_n^2$? ¿A qué valor?

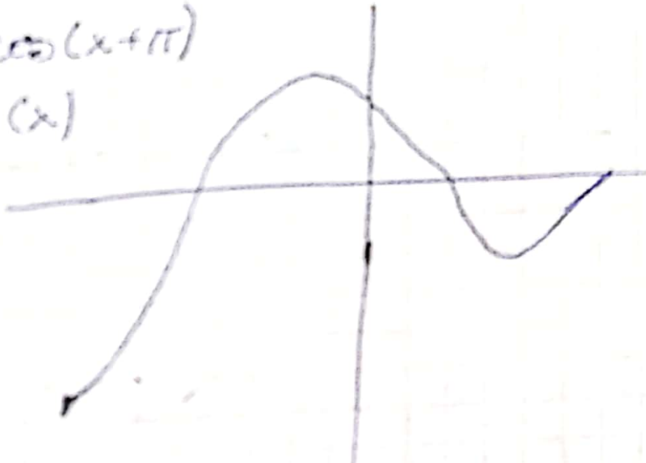
$$f(x) = (x-\pi)\overbrace{\operatorname{sen}(x+\pi)}^{-\operatorname{sen}(x)}$$
$$= (\pi - x)\operatorname{sen}(x)$$



$$f'(x) = \operatorname{sen}(x+\pi) + (x-\pi)\cos(x+\pi)$$
$$= -\operatorname{sen}(x) + (\pi - x)\cos(x)$$

$f'(\pi) = 0$

$f'(-\pi) = -2\pi$



$f''(x) = 2\cos(x+\pi) - f(x)$ es continua porque es "suma" de func. continua

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ es continua en } [-\pi,\pi] \text{ y } f(\pi)=f(\pi); \\ f' \text{ es continua (aún más que CPP)} \\ \rightarrow \text{La serie de Fourier converge unif a } f \\ \text{en } [-\pi,\pi] \text{ y además conv. absolut.} \end{array}}$$

Como Sf cv → c punt
↳ c media cuad → vale la igualdad de Parseval

func

Con todo esto:

$$f(0) \overset{\text{CPUNT}}{=} S_f(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n = 0$$

$$2\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |(x-\pi)\,\text{sen}(x+\pi)|^2 dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |(\pi - x)\,\text{sen}(x)|^2 dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - x)^2 \,\text{sen}^2(x)\, dx = \overbrace{\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(x)\, dx}^{\pi^3} {}^{(1)} - \overbrace{2\pi \int_{-\pi}^{\pi} x\, \text{sen}^2(x)\, dx}^{0} \;(2)$$

$$+ \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \text{sen}^2(x)\, dx \quad (3)}_{\pi^3/3 - \pi/2} = \frac{2\pi^3}{3} - \pi/2$$

Busco la primitiva de (1):

- $$\int \text{sen}^2(x) dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}(2x)}{4} + c$$

$$\Rightarrow \pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(x)\, dx = 2\pi^2 \int_0^{\pi} \text{sen}^2(x)\, dx = 2\pi^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{\text{sen}(2x)}{4}\right]_0^{\pi}$$

$$= 2\pi^2 \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\text{sen}(2\pi)}{4} - 0 + 0\right] = \pi^3$$

$$\int x^2 \text{sen}^2(x)\, dx = \int x^2 \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right) = \int \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2 \cos(2x)}{2}$$

$$= \frac{x^3}{6} - \int \frac{x^2\cos(2x)}{2}dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2 sen(2x)}{4} - \frac{x\cos(2x)}{4} + \frac{sen(2x)}{8} + c$$

$$\bullet \int \frac{x^2\cos(2x)}{2}dx = \frac{x^2 sen(2x)}{4} - \int \frac{x\, sen(2x)}{2}dx$$

$u = x^2 \to du = 2x\,dx$

$dV = \frac{\cos(2x)}{2}dx$

$V = \frac{sen(2x)}{4}$

$$= \frac{x^2 sen(2x)}{4} - \frac{1}{2}\left[\frac{-x\cos(2x)}{2} + \int \frac{\cos(2x)dx}{2}\right]$$

$u = x \to du = dx$

$dV = sen(2x)dx$

$V = \frac{-\cos(2x)}{2}$

$$= \frac{x^2 sen(2x)}{4} + \frac{x\cos(2x)}{4} - \frac{sen(2x)}{8} + c$$

$$2\int_0^{\pi} x^2 sen^2(x)dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2 sen(2x)}{4} - \frac{x\cos(2x)}{4} + sen(2x)/8 \Big|_0^{\pi} \cdot 2$$

$$= \left[\frac{\pi^3}{6} - 0 - \pi/4\right] \cdot 2$$

para el "complicado"

$$\bullet \int x\, sen^2(x)dx = \int x\frac{(1-\cos(2x))}{2} = \int \frac{x}{2} - \int \frac{x\cos(2x)}{2}$$

$$= \frac{x^2}{4} - \left[\frac{x\, sen(2x)}{4} - \int \frac{sen(2x)}{4}dx\right]$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{x\, sen(2x)}{4} - \frac{\cos(2x)}{8}$$

func impar en int sim.

$$-2\pi \int_{-\pi}^{+\pi} x\, sen^2(x)dx = -2\pi\left[\frac{x^2}{4} - \frac{x\, sen(2x)}{4} - \frac{\cos(2x)}{8}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{4}}$$

Si f es cont en $[-\pi, \pi]$ y $f(\pi) = f(-\pi)$ con f' y f'' CPP $\Rightarrow$ la $SF(f')$ es la derivada de $SF(f)$.

Como esto se cumple:

$$S_F(f') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\alpha_n e^{inx}$$

Como f' es una func $L^2[-\pi, \pi] \Rightarrow$ converge en MC.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} [-\operatorname{sen}(x) + (\pi - x)\cos(x)]\,dx$$

$$= \underbrace{-\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx}_{0} + \underbrace{\pi \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\,dx}_{0} - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(x)\,dx}_{0} < \infty$$

$\Rightarrow f'$ es al menos L^1.

$$\int_{-\pi}^{\pi} ((\pi - x)\cos(x) - \operatorname{sen}(x))^2\,dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x-\pi)^2\cos^2(x) - 2\operatorname{sen} x\,(\pi - x)\cos(x) - \operatorname{sen}^2(x)\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x-\pi)^2\cos^2(x)\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - x)\operatorname{sen}(2x)\,dx - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(x)\,dx}_{\pi}$$

habría que terminar la cuenta pero con esto y la identidad de Parseval, sale $\sum_{-\infty}^{+\infty} n^2\alpha^2 =$ valor de la integral $\cdot \frac{1}{2\pi}$

Corramos con paciencia la carrera que tenemos por delante.

Hebreos 12:1b